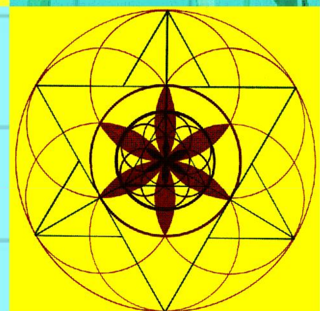
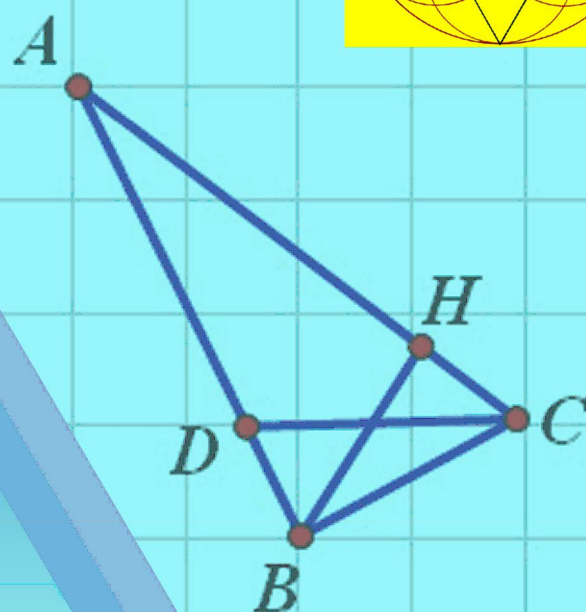
BAN BIÊN TẬP DIỄN ĐÀN BOXMATH.VN

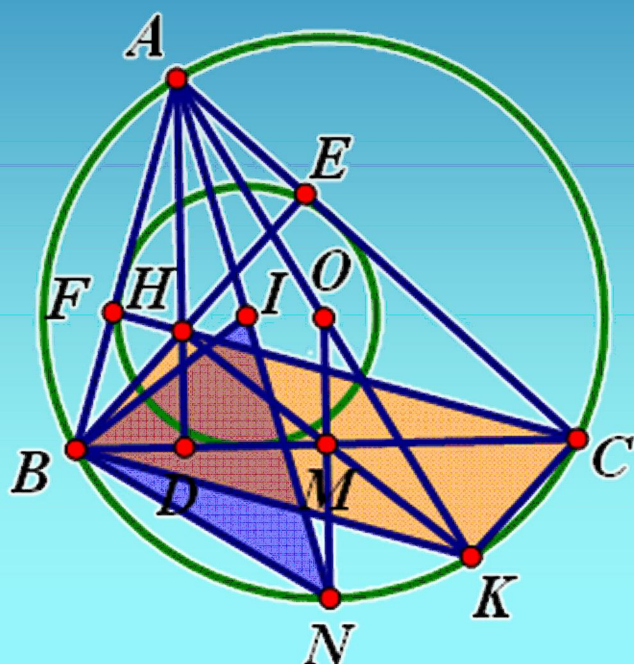


TUYỂN TẬP

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG







Box Math
http://boxmath.vn

Mục lục

Lời nói đầu

Hình học giải tích hay hình học tọa độ là một cách nhìn khác về Hình học . Hình học giải tích trong mặt phẳng được đưa vào chương trình toán của lớp 10 nhưng vẫn có trong đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng. Để góp phần trong việc ôn tập cho học sinh trước khi dự thi Diễn đàn BoxMath xin đóng góp tuyển tập này.

Khi thực hiện biên soạn trên diễn đàn BoxMath, tôi đã nhận được sự quan tâm của nhiều thành viên và quản trị viên. Những người đã góp sức vào quá trình biên soạn, góp ý sửa chữa về các chi tiết trong tuyển tập. Sự đóng góp của các bạn, và những thầy cô tâm huyết chứng tỏ cuốn tài liệu này là cần thiết cho học sinh.

Bây giờ đây, khi bạn đang đọc nó trên máy tính hay đã được in ra trên giấy. Chúng tôi hy vọng nó sẽ góp phần ôn tập kiến thức của bản thân đồng thời tăng thêm động lực khi học tập hình học giải tích trong không gian.

Mặc dù đã biên soạn rất kỹ tuy nhiên tài liệu có thể vẫn còn sai sót, mong các bạn khi đọc hãy nhặt ra dùm và gởi email về hungchng@yahoo.com. Đồng thời qua đây cũng xin phép các Tác giả đã có bài tập trong tuyển tập này mà chúng tôi chưa nhớ ra để ghi rõ nguồn gốc vào, cùng lời xin lỗi chân thành.

Thay mặt nhóm biên soạn, tôi xin chân thành cảm ơn!

Chủ biên
Châu Ngọc Hùng

Các thành viên biên soạn

1. Huỳnh Chí hào -THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp
2. Lê Đình Mẫn - THPT Nguyễn Chí Thanh - Quảng Bình
3. Lê Trung Tín - THPT Hồng Ngự 2 - Đồng Tháp
4. Đỗ Kiêm Tùng - THPT Ngọc Tảo - Hà Nội
5. Tôn Thất Quốc Tấn - Huế
6. Nguyễn Tài Tuệ - THPT Lương Thế Vinh - Vụ Bản Nam Định
7. Nguyễn Xuân Cường - THPT Anh Sơn 1 - Nghệ An
8. Lê Đức Bin - THPT Đồng Xoài - Bình Phước
9. Châu Ngọc Hùng - THPT Ninh Hải - Ninh Thuận
10. Phạm Tuấn Khải - THPT Trần Văn Năng - Đồng Tháp.

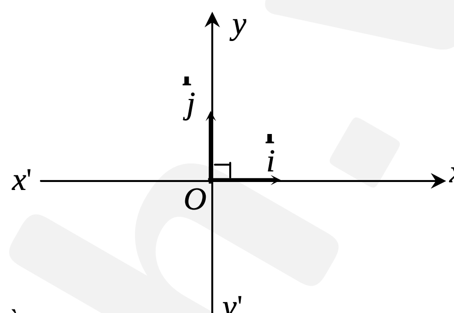
boxmath

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG
TỌA ĐỘ ĐIỂM - TỌA ĐỘ VÉCTƠ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Hệ trục toạ độ ĐỀ-CÁC trong mặt phẳng :

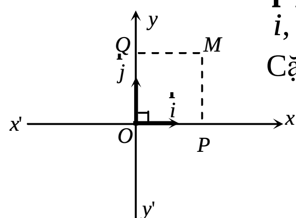


- x'Ox : trục hoành
- y'Oy : trục tung
- O : gốc toạ độ
- $\vec{i},\vec{j}$: véctơ đơn vị $\left(|\vec{i}|=|\vec{j}|=1 \text{ và } \vec{i}\perp\vec{j}\right)$

Quy ước : Mặt phẳng mà trên đó có chọn hệ trục toạ độ Đề-Các vuông góc Oxy được gọi là mặt phẳng Oxy và ký hiệu là : mp(Oxy)

II. Toạ độ của một điểm và của một véctơ:

1. Định nghĩa 1: Cho $M\in mp(Oxy)$. Khi đó véctơ $\overrightarrow{OM}$ được biểu diễn một cách duy nhất theo $\vec{i},\vec{j}$ bởi hệ thức có dạng : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ voi x,y∈ ℝ .

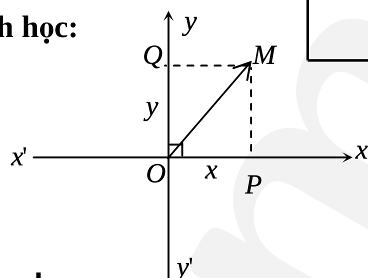


Cặp số (x;y) trong hệ thức trên được gọi là toạ độ của điểm M.

Ký hiệu: M(x;y) (x: hoành độ của điểm M; y: tung độ của điểm M)

$$M(x;y) \overset{d/n}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

- **Ý nghĩa hình học:**

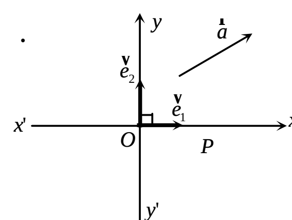


$$x=\overline{OP} \quad \text{và} \quad y=\overline{OQ}$$

2. Định nghĩa 2: Cho $\vec{a}\in mp(Oxy)$. Khi đó véctơ $\vec{a}$ được biểu diễn một cách duy nhất theo $\vec{i},\vec{j}$ bởi hệ thức có dạng : $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ voi $a_1,a_2\in$ ℝ .

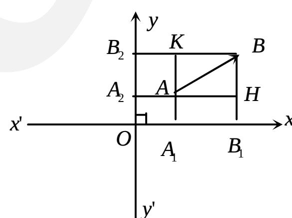
Cặp số ($a_1;a_2$) trong hệ thức trên được gọi là toạ độ của véctơ $\vec{a}$.

Ký hiệu: $\vec{a}=(a_1;a_2)$



$$\vec{a}=(a_1;a_2) \overset{d/n}{\Leftrightarrow} \vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$$

- **Ý nghĩa hình học:**

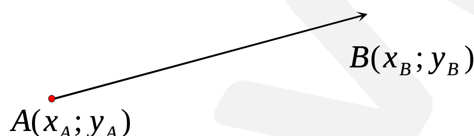


$$a_1=\overline{A_1B_1} \quad \text{và} \quad a_2=\overline{A_2B_2}$$

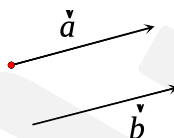
III. Các công thức và định lý về toạ độ điểm và toạ độ véctơ :

Định lý 1: Nếu $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ thì

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$



Định lý 2: Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì



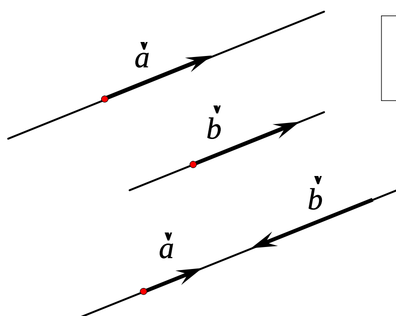
* $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$
* $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$
* $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$
* $k.\vec{a} = (ka_1; ka_2) \qquad (k \in \mathbb{R})$

IV. Sự cùng phương của hai véctơ:

Nhắc lại

- Hai véctơ cùng phương là hai véctơ nằm trên cùng một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song .
- **Định lý về sự cùng phương của hai véctơ:**

Định lý 3 : Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ voi $\vec{b} \neq \vec{0}$



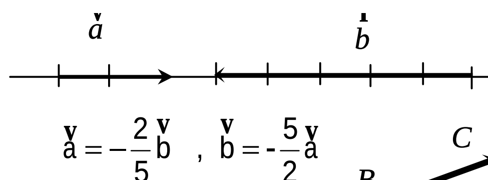
$\vec{a}$ cùng phuong $\vec{b}$ $\Leftrightarrow \exists! k \in \mathbb{R}$ sao cho $\vec{a} = k.\vec{b}$

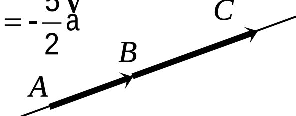
Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì số k trong trường hợp này được xác định như sau:

k > 0 khi $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$

k < 0 khi $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}$

$|k| = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$





Định lý 4 : A, B, C thang hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ cùng phuong $\overrightarrow{AC}$

(Điều kiện 3 điểm thẳng hàng)

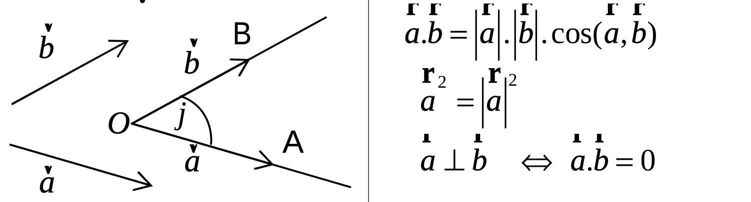
Định lý 5: Cho hai véctơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ vaø $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ta có :

$\vec{a}$ cùng phuong $\vec{b}$ $\Leftrightarrow a_1.b_2 - a_2.b_1 = 0$ (Điều kiện cùng phương của 2 véctơ

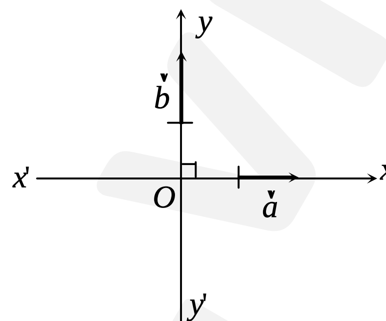
$\begin{vmatrix} \vec{a} = (a_1; a_2) \\ \vec{b} = (b_1; b_2) \end{vmatrix}$	VD :	$\begin{vmatrix} \vec{a} = (1; 2) \\ \vec{b} = (2; 4) \end{vmatrix}$

V. Tích vô hướng của hai véctơ:

Nhắc lại:



$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$$
$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$



Định lý 6: Cho hai véctơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ta có :

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

(Công thức tính tích vô hướng theo tọa độ)

Định lý 7: Cho hai véctơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ta có :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

(Công thức tính độ dài véctơ)

Định lý 8: Nếu $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ thì

$A(x_A; y_A)$ ——— $B(x_B; y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

(Công thức tính khoảng cách 2 điểm)

Định lý 9: Cho hai véctơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ta có :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

(Điều kiện vuông góc của 2 véctơ)

Định lý 10: Cho hai véctơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ta có

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

(Công thức tính góc của 2 véctơ)

VI. Điểm chia đoạn thẳng theo tỷ số k:

Định nghĩa: Điểm M được gọi là chia đoạn AB theo tỷ số k ($k \neq 1$) nếu như : $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB}$



Định lý 11 : Nếu $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB}$ ($k \neq 1$) thì

$$(x_M; y_M) = \left(\frac{x_A - k.x_B}{1-k}; \frac{y_A - k.y_B}{1-k}\right)$$

Đặc biệt : M là trung điểm của AB $\Leftrightarrow$ $(x_M; y_M) = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

VII. Một số điều kiện xác định điểm trong tam giác :

1. G là trong tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

2. H là truc tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

3. A' là chân duong cao ke tu A $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phuong } \overrightarrow{BC} \end{cases}$

4. I là tâm duong tròn ngoai tiêp tam giác ABC $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$

5. D là chân duong phân giác trong cua góc A cua ΔABC $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DB} = -\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$

6. E là chân duong phân giác ngoài cua góc A cua ΔABC $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{EB} = \dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$

7. J là tâm duong tròn nôi tiêp ΔABC $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{JA} = -\dfrac{AB}{BD}.\overrightarrow{JD}$

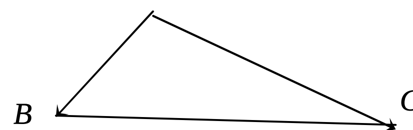
VIII. Kiến thức cơ bản thường sử dụng khác:

Công thức tính diện tích tam giác theo toạ độ ba đỉnh :

Định lý 12: Cho tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{AB} = (a_1; a_2)$ và $\overrightarrow{AC} = (b_1; b_2)$ ta có :

B

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.\left|a_1 b_2 - a_2 b_1\right|$$



Cơng thức tính góc hai đường thẳng dựa vào hệ số góc :

Định lý 13: Cho hai đường thẳng Δ_1 với hệ số góc k_1 và Δ_2 với hệ số góc k_2. Khi đó nếu $(\Delta_1; \Delta_2) = a$ thì

$$\tan a = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$$

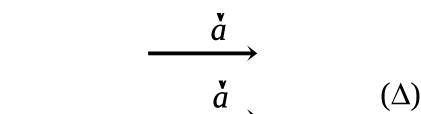
ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

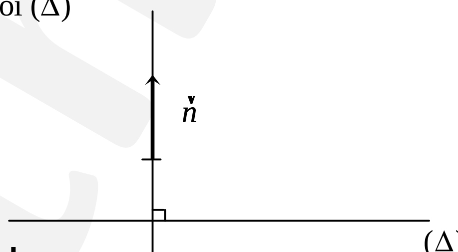
A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Các định nghĩa về VTCP và VTPT (PVT) của đường thẳng:

$\vec{a}$ là VTCP của đường thẳng (Δ) $\overset{dn}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \text{ có giá song song hay trùng voi } (\Delta) \end{cases}$

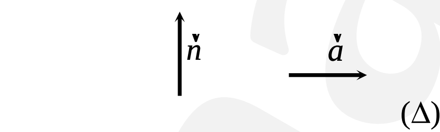
$\vec{n}$ là VTPT của đường thẳng (Δ) $\overset{dn}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \text{ có giá vuông góc voi } (\Delta) \end{cases}$





*** Chú ý:**

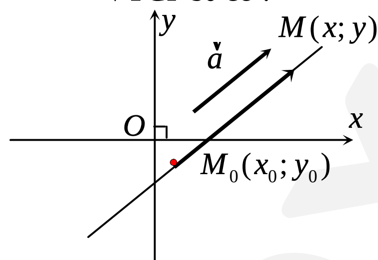
- Nếu đường thẳng (Δ) có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2)$ thì có VTPT là $\vec{n} = (-a_2; a_1)$
- Nếu đường thẳng (Δ) có VTPT $\vec{n} = (A; B)$ thì có VTCP là $\vec{a} = (-B; A)$



II. Phương trình đường thẳng :

1. Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng :

a. Định lý : Trong mặt phẳng (Oxy). Đường thẳng (Δ) qua $M_0(x_0;y_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2)$ làm VTCP sẽ có :



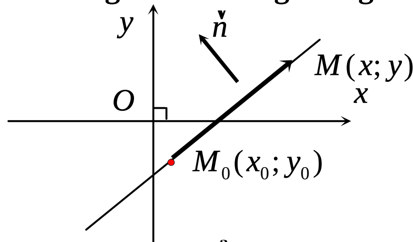
Phương trình tham số là : $(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + t.a_1 \\ y = y_0 + t.a_2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Phương trình chính tắc là : $(\Delta): \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} \quad (a_1, a_2 \neq 0)$

boxmath.vn

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng :

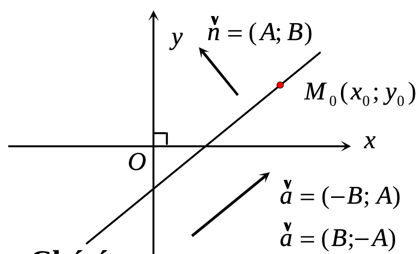
a. Phương trình đường thẳng đi qua một điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có VTPT $\vec{n}=(A;B)$ là:



$$(\Delta): A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (A^2+B^2\neq 0)$$

b. Phương trình tổng quát của đường thẳng :

Định lý : Trong mặt phẳng (Oxy). Phương trình đường thẳng (Δ) có dạng :



$$Ax+By+C=0 \quad \text{với } A^2+B^2\neq 0$$

Chú ý:

Từ phương trình (Δ): $Ax+By+C=0$ ta luôn suy ra được :

1. VTPT của (Δ) là $\vec{n}=(A;B)$
2. VTCP của (Δ) là $\vec{a}=(-B;A)$ hay $\vec{a}=(B;-A)$
3. $M_0(x_0;y_0)\in(\Delta)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+C=0$

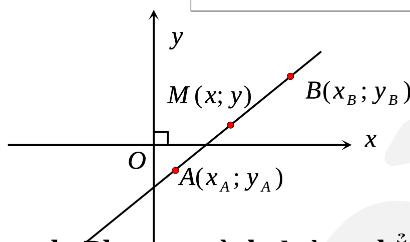
Mệnh đề (3) được hiểu là :

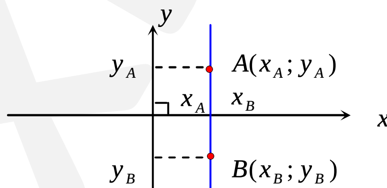
Điều kiện cần và đủ để một điểm nằm trên đường thẳng là tọa độ điểm đó nghiệm đúng phương trình của đường thẳng .

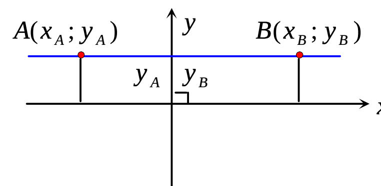
3. Các dạng khác của phương trình đường thẳng :

a. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$:

$$(AB): \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A} \qquad (AB): x=x_A \qquad (AB): y=y_A$$







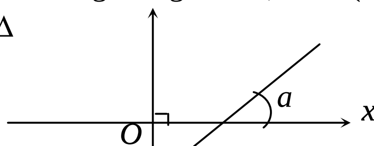
b. Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn:

Định lý: Trong mp(Oxy) phương trình đường thẳng (Δ) cắt trục hồng tại điểm A(a;0) và trục tung tại điểm B(0;b) với a, b $\neq$ 0 có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

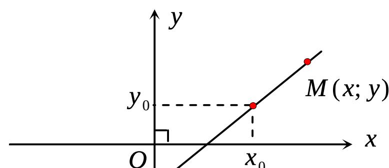
boxmath.vn

c. Phương trình đường thẳng đi qua một điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k:

y **Định nghĩa:** Trong mp(Oxy) cho đường thẳng Δ. Gọi $a = (Ox,\Delta)$ thì $k = \tan a$ được gọi là hệ số góc của đường thẳng Δ



Định lý 1: Phương trình đường thẳng Δ qua $M_0(x_0;y_0)$ có hệ số góc k là :



$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \textbf{(1)}$$

Chú ý 1: Phương trình (1) không có chứa phương trình của đường thẳng đi qua M_0 và vuông góc Ox nên khi sử dụng ta cần để ý xét thêm đường thẳng đi qua M_0 và vuông góc Ox là $\mathbf{x = x_0}$

Chú ý 2: Nếu đường thẳng Δ có phương trình $y = ax + b$ thì hệ số góc của đường thẳng là $k = a$

Định lý 2: Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 ta có :

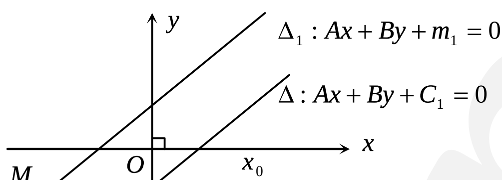
- $\Delta_1 // \Delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2 \qquad (\Delta_1 \neq \Delta_2)$
- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1.k_2 = -1$

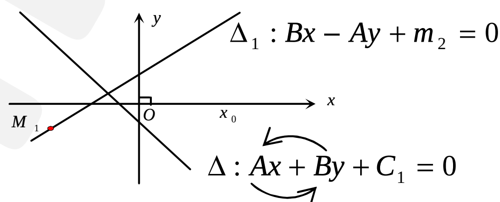
d. Phương trình đt đi qua một điểm và song song hoặc vuông góc với một đt cho trước:

i. Phương trình đường thẳng (Δ_1) //(Δ): Ax+By+C=0 có dạng: $Ax+By+m_1=0$

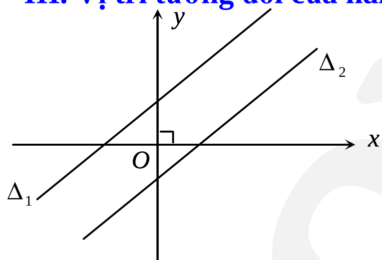
ii. Phương trình đường thẳng (Δ_1) $\perp$(Δ): Ax+By+C=0 có dạng: $Bx-Ay+m_2=0$

Chú ý: $m_1;m_2$ được xác định bởi một điểm có tọa độ đã biết nằm trên $\Delta_1;\Delta_2$

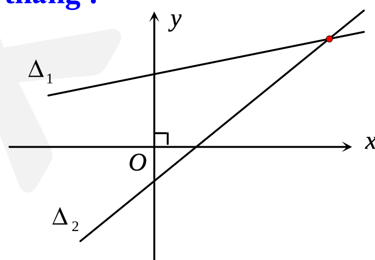




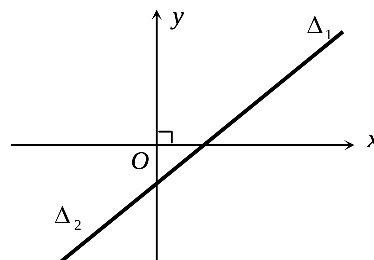
III. Vị trí tương đối của hai đường thẳng :



$\Delta_1 // \Delta_2$



Δ_1 cat Δ_2



$\Delta_1 \equiv \Delta_2$

Trong mp(Oxy) cho hai đường thẳng : $(\Delta_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0$
$(\Delta_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Vị trí tương đối của (Δ_1) và (Δ_2) phụ thuộc vào số nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases} \quad (1)$$

Chú ý: Nghiệm duy nhất (x;y) của hệ (1) chính là tọa độ giao điểm M của (Δ_1) và (Δ_2)

Định lý 1:

i.	Hệ (1) vô nghiệm	$\Leftrightarrow$	$(\Delta_1) // (\Delta_2)$
ii.	Hệ (1) có nghiệm duy nhất	$\Leftrightarrow$	(Δ_1) cắt (Δ_2)
iii.	Hệ (1) có nghiệm tùy ý	$\Leftrightarrow$	$(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$

Định lý 2: Nếu $A_2; B_2; C_2$ khác 0 thì

i.	(Δ_1) cắt (Δ_2)	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$
ii.	$(\Delta_1) // (\Delta_2)$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$
iii.	$(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

IV. Góc giữa hai đường thẳng

1.Định nghĩa: Hai đường thẳng a, b cắt nhau tạo thành 4 góc. Số đo nhỏ nhất trong các số đo của bốn góc đó được gọi là *góc giữa hai đường thẳng a và b* (hay *góc hợp bởi hai đường thẳng a và b*). Góc giữa hai đường thẳng a và b được kí hiệu là (a,b)

Khi a và b song song hoặc trùng nhau, ta nói rằng góc của chúng bằng 0^0

2. Công thức tính góc giữa hai đường thẳng theo VTCP và VTPT

a) Nếu hai đường thẳng có VTCP lần lượt là $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thì

$$\cos(a,b) = \left|\cos(\vec{u},\vec{v})\right| = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

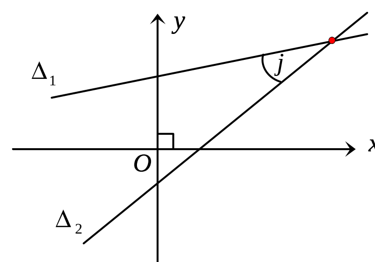
b) Nếu hai đường thẳng có VTPT lần lượt là $\vec{n}$ và $\vec{n}'$ thì

$$\cos(a,b) = \left|\cos(\vec{n},\vec{n}')\right| = \frac{|\vec{n}.\vec{n}'|}{|\vec{n}|.|\vec{n}'|}$$

Định lý : Trong mp(Oxy) cho hai đường thẳng : $(\Delta_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0$
$(\Delta_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Gọi φ $(0^0 \leq \varphi \leq 90^0)$ là góc giữa (Δ_1) và (Δ_2) ta có :

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$



Hệ quả:

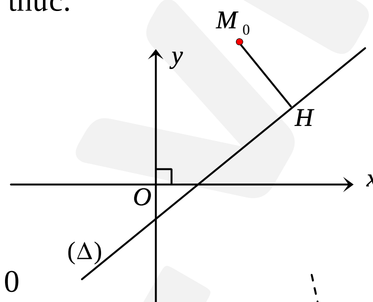
$$(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

V. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng :

Định lý 1: Trong mp(Oxy) cho hai đường thẳng $(\Delta): Ax+By+C=0$ và điểm $M_0(x_0;y_0)$

Khoảng cách từ M_0 đến đường thẳng (Δ) được tính bởi công thức:

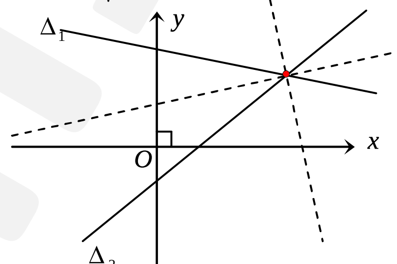
$$d(M_0;\Delta)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



Định lý 2: Trong mp(Oxy) cho hai đường thẳng : $(\Delta_1): A_1x+B_1y+C_1=0$
$(\Delta_2): A_2x+B_2y+C_2=0$

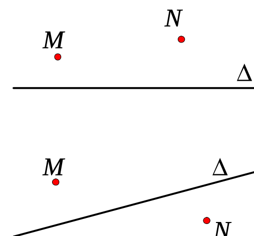
Phương trình phân giác của góc tạo bởi (Δ_1) vaø (Δ_2) là :

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$



Định lý 3: Cho đường thẳng $(\Delta_1): Ax+By+C=0$ và hai điểm $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$ không nằm trên (Δ). Khi đó:

- Hai điểm M , N nằm cùng phía đối với (Δ) khi và chỉ khi
  $(Ax_M+By_M+C)(Ax_N+By_N+C)>0$
- Hai điểm M , N nằm khác phía đối với (Δ) khi và chỉ khi
  $(Ax_M+By_M+C)(Ax_N+By_N+C)<0$



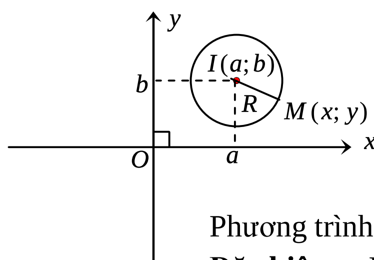
ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phương trình đường tròn:

1. Phương trình chính tắc:

Định lý : Trong mp(Oxy). Phương trình của đường tròn (C) tâm I(a;b), bán kính R là :



$$(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của đường tròn

Đặc biệt: Khi I ≡ O thì $(C): x^2+y^2=R^2$

2. Phương trình tổng quát:

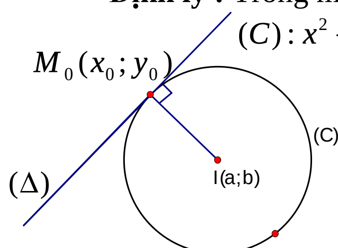
Định lý : Trong mp(Oxy). Phương trình : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$

là phương trình của đường tròn (C) có tâm I(a;b), bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

II. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn:

Định lý : Trong mp(Oxy). Phương trình tiếp tuyến với đường tròn

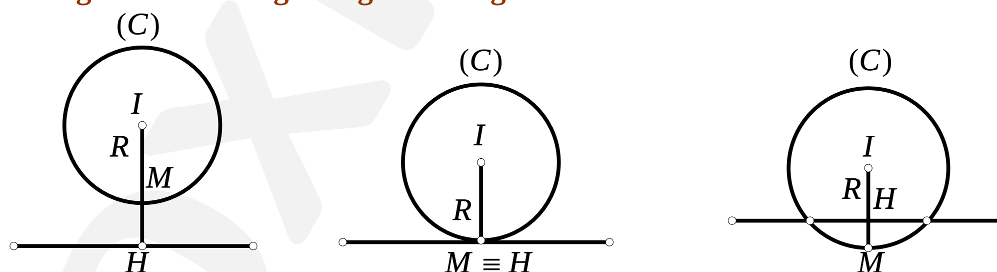
$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ là :



$$(\Delta): x_0x+y_0y-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$$

VI. Các vấn đề có liên quan:

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:



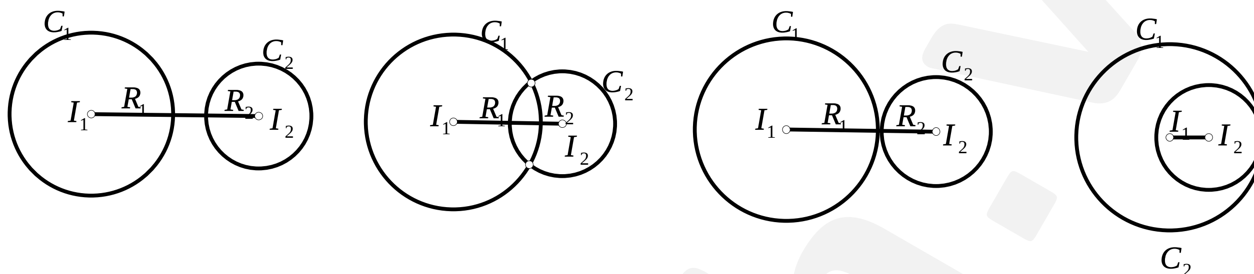
Định lý:

$(\Delta)\cap(C)=\varnothing$	⇔	d(I;Δ) > R
(Δ) tiếp xúc (C)	⇔	d(I;Δ) = R
(Δ) cát (C)	⇔	d(I;Δ) < R

Lưu ý: Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ và đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$. Tọa độ giao điểm (nếu có) của (C) và (Δ) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

2. Vị trí tương đối của hai đường tròn :



(C_1) và (C_2) không cát nhau	$\Leftrightarrow$	$I_1I_2 > R_1 + R_2$
(C_1) và (C_2) cát nhau	$\Leftrightarrow$	$\lvert R_1 - R_2\rvert < I_1I_2 < R_1 + R_2$
(C_1) và (C_2) tiêp xúc ngoài nhau	$\Leftrightarrow$	$I_1I_2 = R_1 + R_2$
(C_1) và (C_2) tiêp xúc trong nhau	$\Leftrightarrow$	$I_1I_2 = \lvert R_1 - R_2\rvert$

Lưu ý: Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

và đường tròn $(C'): x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$.

Tọa độ giao điểm (nếu có) của (C) và (C’) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \\ x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0 \end{cases}$$

boxmath.vn

ĐƯỜNG ELÍP TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

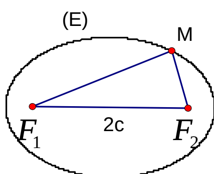
A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

I.Định nghĩa:

Elíp (E) là tập hợp các điểm M có tổng khoảng cách đến hai điểm cố định F_1; F_2 bằng hằng số

* Hai điểm cố định F_1; F_2 được gọi là các tiêu điểm

* $F_1F_2 = 2c$ (c > 0) được gọi là tiêu cự

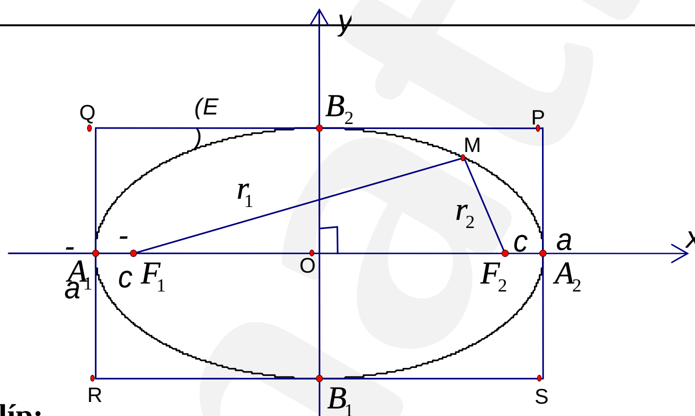


$$(E) = \{M / MF_1 + MF_2 = 2a\}$$ (a>0 : hằng số và a>c)

II. Phương trình chính tắc của Elíp và các yếu tố:

1. Phương trình chính tắc:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{với} \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad (a > b) \quad (1)$$



2. Các yếu tố của Elíp:

*** Elíp xác định bởi phương trình (1) có các đặc điểm:**

- Tâm đối xứng O, trục đối xứng Ox; Oy
- Tiêu điểm $F_1(-c;0)$; $F_2(c;0)$
- Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$
- Trục lớn nằm trên Ox; độ dài trục lớn 2a (= A_1A_2)
- Trục nhỏ nằm trên Oy; độ dài trục lớn 2b (= B_1B_2)
- Đỉnh trên trục lớn : $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$
- Đỉnh trên trục nhỏ :$B_1(0;-b)$; $B_2(0;b)$
- Bán kính qua tiêu điểm:

Với M(x;y) $\in$ (E) thì $$\begin{cases} r_1 = MF_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex \\ r_2 = MF_2 = a - \frac{c}{a}x = a - ex \end{cases}$$

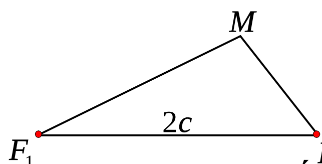
- Tâm sai : $e = \frac{c}{a}$ $(0 < e < 1)$

- Đường chuẩn : $x = \pm\frac{a}{e}$

ĐƯỜNG HYPEBOL TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Định nghĩa:

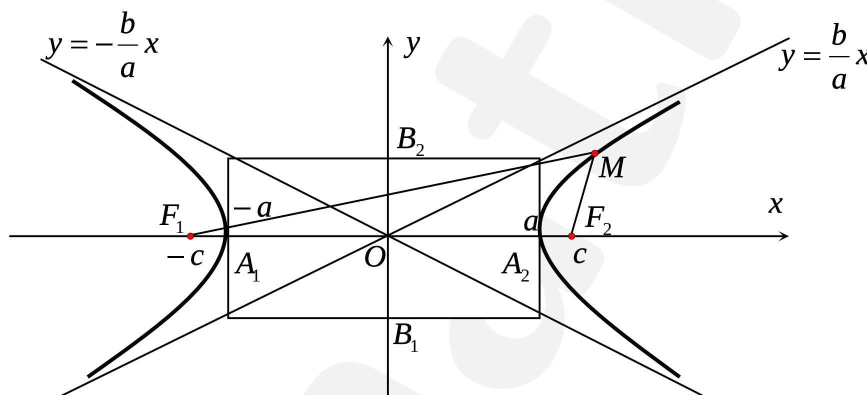


$(H)=\{M / |MF_1 - MF_2| = 2a\}$ (a > 0 : hằng số và a < c) (1)

II. Phương trình chính tắc của Hypebol và các yếu tố:

1. Phương trình chính tắc:

$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{với} \quad b^2=c^2-a^2 \qquad (1)$$



2. Các yếu tố của Hypebol:

*** Hypebol xác định bởi phương trình (1) có các đặc điểm:**

- Tâm đối xứng O, trục đối xứng Ox; Oy
- Tiêu điểm $F_1(-c;0)$; $F_2(c;0)$ Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$
- Trục thực nằm trên Ox; độ dài trục thực 2a (= A_1A_2)
- Trục ảo nằm trên Oy; độ dài trục ảo 2b (= B_1B_2)
- Đỉnh: $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$
- Phương trình tiệm cận : $y=\pm\frac{b}{a}x$
- Bán kính qua tiêu điểm: Với M(x;y) ∈ (H) thì :

Với x > 0 ⇒ $\begin{cases} r_1 = MF_1 = a+ex \\ r_2 = MF_2 = -a+ex \end{cases}$ Với x < 0 ⇒ $\begin{cases} r_1 = MF_1 = -(a+ex) \\ r_2 = MF_2 = -(-a+ex) \end{cases}$

- Tâm sai : $e=\frac{c}{a}$ $(e>1)$
- Đường chuẩn : $x=\pm\frac{a}{e}$

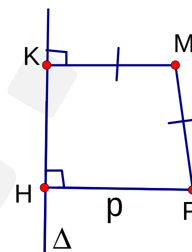
ĐƯỜNG PARABOL TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Định nghĩa :

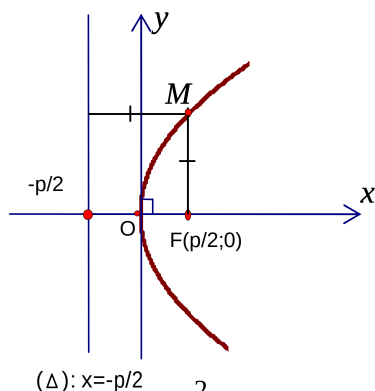
$$(P) = \{M \ / \ MF = d(M, \Delta)\}$$

* F là điểm cố định gọi là tiêu điểm
* (Δ) là đường thẳng cố định gọi là đường chuẩn
* HF = p > 0 gọi là tham số tiêu

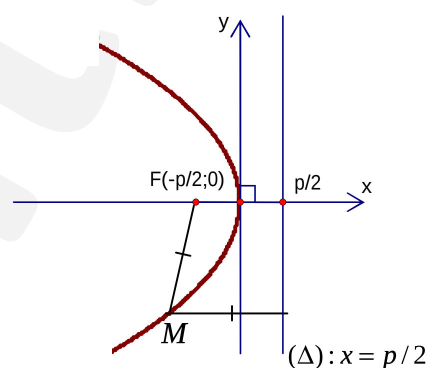


II. Phương trình chính tắc của parabol:

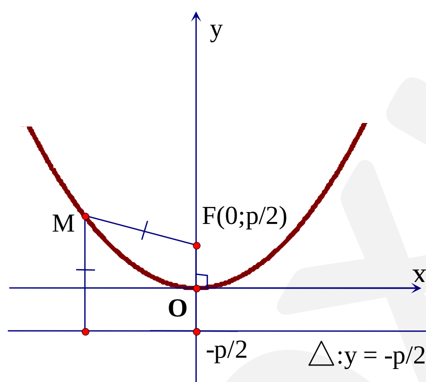
1) Dạng 1: Ptct: $y^2 = 2px$



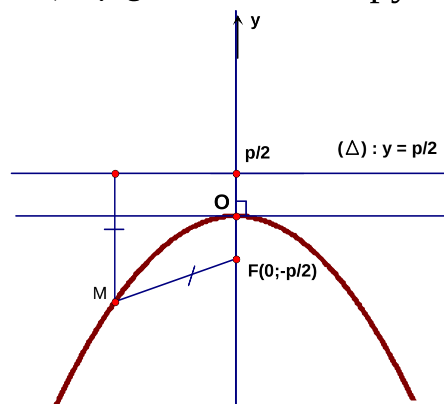
2) Dạng 2: Ptct: $y^2 = -2px$



3) Dạng 3: Ptct: $x^2 = 2py$



4) Dạng 4: Ptct : $x^2 = -2py$

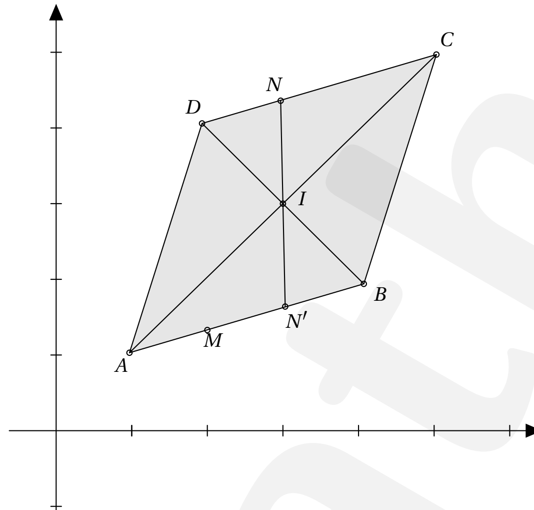


BÀI TOÁN CÓ LỜI GIẢI

1 Điểm - Đường thẳng

Bài 1. *Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(3;3)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(2;\frac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N\left(3;\frac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD. Viết phương trình đường chéo BD biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3.*

Giải:



Tọa độ điểm N' đối xứng với điểm N qua I là $N'\left(3;\dfrac{5}{3}\right)$

Đường thẳng AB đi qua M, N' có phương trình: $x - 3y + 2 = 0$

Suy ra: $IH = d(I, AB) = \dfrac{|3-9+2|}{\sqrt{10}} = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$ Do $AC = 2BD$ nên $IA = 2IB$.

Đặt $IB = x > 0$, ta có phương trình $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{4x^2} = \dfrac{5}{8} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Đặt $B(x, y)$. Do $IB = \sqrt{2}$ và $B \in AB$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 2 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 - 18y + 16 = 0 \\ x = 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{5} < 3 \\ y = \dfrac{8}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 > 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Do B có hoành độ nhỏ hơn 3 nên ta chọn $B\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{8}{5}\right)$

Vậy, phương trình đường chéo BD là: $7x - y - 18 = 0$. □

Bài 2. *Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(-1;2)$ và đường thẳng $(d): x - 2y + 3 = 0$. Tìm trên đường thẳng (d) hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại C và $AC = 3BC$.*

Giải:

Từ yêu cầu của bài toán ta suy ra C là hình chiếu vuông góc của A trên (d).

Phương trình đường thẳng (Δ) qua A và vuông góc với (d) là: $2x + y + m = 0$

$A(-1;2) \in (\Delta) \Leftrightarrow -2 + 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ Suy ra: $(\Delta): 2x + y = 0$.

Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5}\right)$

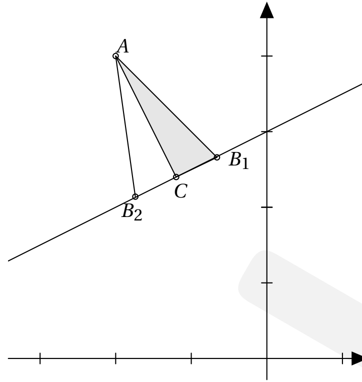
Đặt $B(2t-3; t) \in (d)$, theo giả thiết ta có: $AC = 3BC \Leftrightarrow AC^2 = 9BC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{25}+\frac{16}{25}=9\left[\left(2t-\frac{12}{5}\right)^2+\left(t-\frac{6}{5}\right)^2\right] \Leftrightarrow 45t^2-108t+64=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{16}{15} \\ t=\frac{4}{3} \end{array}\right..$$

Với $t=\frac{16}{15} \Rightarrow B\left(-\frac{13}{15};\frac{16}{15}\right)$

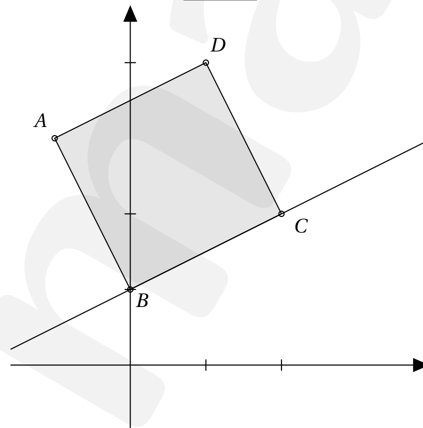
Với $t=\frac{4}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$

Vậy, có hai điểm thỏa đề bài là: $B\left(-\frac{13}{15};\frac{16}{15}\right)$ hoặc $B\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$. □



Bài 3. *Cho điểm $A(-1;3)$ và đường thẳng Δ có phương trình $x-2y+2=0$. Dựng hình vuông $ABCD$ sao cho hai đỉnh B,C nằm trên Δ và các tọa độ đỉnh C đều dương. Tìm tọa độ các đỉnh B,C,D.*

Giải:



Đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với Δ có phương trình: $2x+y+m=0$

$A(-1;3)\in\Delta \Leftrightarrow -2+3+m=0 \Leftrightarrow m=-1$ Suy ra: $(d): 2x+y-1=0$

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=-2 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(0;1)$

Suy ra: $BC=AB=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ Đặt $C(x_0;y_0)$ với $x_0,y_0>0$, ta có:

$$\begin{cases} C\in\Delta \\ BC=\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2y_0+2=0 \\ x_0^2+(y_0-1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2y_0-2 \\ x_0^2+(y_0-1)^2=5 \end{cases}$$

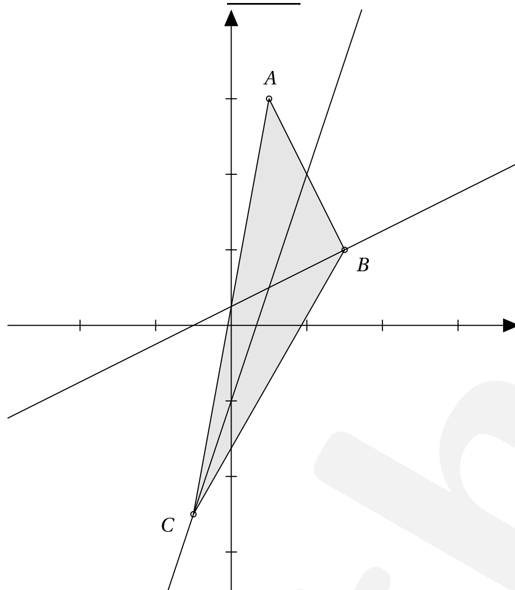
Giải hệ này ta được: $\begin{cases} x_0=2 \\ y_0=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=0 \end{cases}$ (loại). Suy ra: $C(2;2)$

Do ABCD là hình vuông nên: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-2=-1-0 \\ y_D-2=3-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=1 \\ y_D=4 \end{cases} \Rightarrow D(1;4)$

Vậy $B(0;1)$, $C(2;2)$, $D(1;4)$ □

Bài 4. *Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC biết $A(1;6)$ và hai đường trung tuyến nằm trên hai đường thẳng có phương trình là $x-2y+1=0, 3x-y-2=0$.*

Giải:



Do tọa độ điểm A không nghiệm đúng các phương trình đã cho nên ta có thể giả sử rằng:
Phương trình trung tuyến BM là: $x-2y+1=0$ Phương trình trung tuyến CN là: $3x-y-2=0$
Đặt $B(2b-1;b)$, do N là trung điểm AB nên : $N\left(b;\frac{b+6}{2}\right)$

$N\left(b;\frac{b+6}{2}\right)\in CN \Leftrightarrow 3b-\frac{b+6}{2}-2=0 \Leftrightarrow b=2$ Suy ra: $B(3;2)$

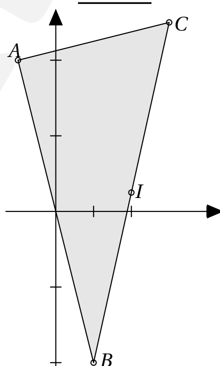
Đặt $C(c;3c-2)$, do M là trung điểm AC nên : $M\left(\frac{c+1}{2};\frac{3c+4}{2}\right)$

$M\left(\frac{c+1}{2};\frac{3c+4}{2}\right)\in BM \Leftrightarrow \frac{c+1}{2}-2.\frac{3c+4}{2}+1=0 \Leftrightarrow c=-1$ Suy ra: $C(-1;-5)$

Vậy phương trình ba cạnh là: $AB: 11x-2y+1=0,\ BC: 7x-4y-13=0,\ AC: 2x+y-8=0$ □

Bài 5. *Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $A(-1;4), B(1;-4)$ và đường thẳng BC đi qua điểm $I\left(2;\frac{1}{2}\right)$. Tìm tọa độ đỉnh C.*

Giải:



Phương trình đường thẳng $BC: 9x-2y-17=0$ Do $C\in BC$ nên ta có thể đặt $C\left(c;\frac{9c-17}{2}\right)$,

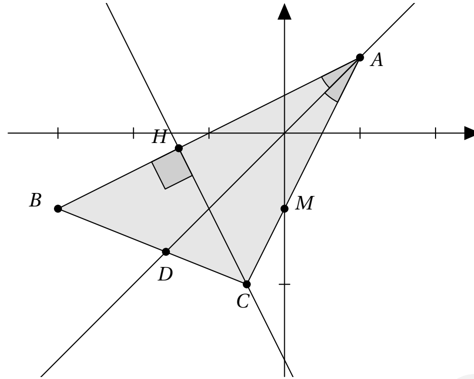
ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-8)$ $\quad \overrightarrow{AC}=\left(c+1;\frac{9c-25}{2}\right)$. Theo giả thiết tam giác ABC vuông tại A nên:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow c+1-4.\frac{9c-25}{2}=0 \Leftrightarrow c=3$$

Vậy $C(3;5)$ □

Bài 6. *Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đường phân giác trong $(AD): x-y=0$, đường cao $(CH): 2x+y+3=0$, cạnh AC qua $M(0;-1)$, $AB=2AM$. Viết phương trình ba cạnh của tam giác ABC.*

Giải:



Gọi N là điểm đối xứng của M qua AD. Suy ra: $N \in$ tia AB

Mặt khác ta có: $AN=AM \Rightarrow AB=2AN \Rightarrow N$ là trung điểm của AB.

Do $MN \perp AD$ nên phương trình MN là: $x+y+m_1=0$

$M(0;-1) \in MN \Leftrightarrow -1+m_1=0 \Leftrightarrow m_1=1$ Suy ra: $(MN): x+y+1=0$

Gọi $K=MN \cap AD$, tọa độ K là nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

Vì K là trung điểm của MN nên: $\begin{cases} x_N=2x_K-x_M=-1 \\ y_N=2y_K-y_M=0 \end{cases} \Rightarrow N(-1;0)$

Do $AB \perp CH$ nên phương trình AB là: $x-2y+m_2=0$

$N(-1;0) \in AB \Leftrightarrow -1+m_2=0 \Leftrightarrow m_2=1$ Suy ra: $(AB): x-2y+1=0$

Vì $A=AB \cap AD$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$

Suy ra: $(AC): 2x-y-1=0$ Vì $C=AC \cap CH$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2};-2\right)$$

Do N là trung điểm của $AB \Rightarrow \begin{cases} x_B=2x_N-x_A=-3 \\ y_B=2y_N-y_A=-1 \end{cases} \Rightarrow B(-3;-1)$

Phương trình cạnh BC: $2x+5y+11=0$ □

Bài 7. *Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có các đỉnh $A(-1;2)$. Trung tuyến $CM: 5x+7y-20=0$ và đường cao $BH: 5x-2y-4=0$. Viết phương trình các cạnh AC và BC.*

Giải:

Do $AC \perp BH$ nên phương trình AC là: $2x+5y+m=0$ $A(-1;2) \in AC \Leftrightarrow -2+10+m=0 \Leftrightarrow m=-8$

Suy ra: $(AC): 2x+5y-8=0$ Do $C=AC \cap CM$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases} 2x+5y=8 \\ 5x+7y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(4;0)$$

Đặt $B(a;b)$, do $B \in BH$ nên: $5a-2b-4=0$

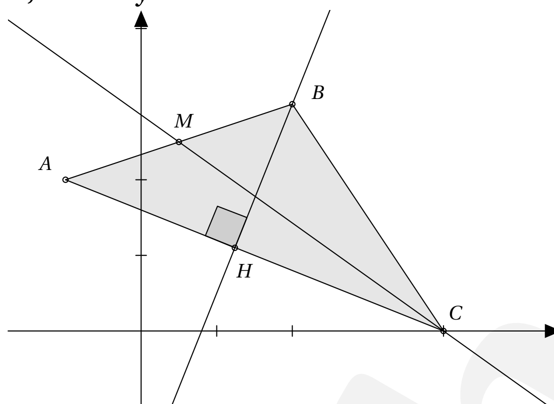
Vì M là trung điểm của AB nên tọa độ M là : $M\left(\dfrac{-1+a}{2};\dfrac{2+b}{2}\right)$

boxmath.vn

Do $M\left(\dfrac{-1+a}{2};\dfrac{2+b}{2}\right)\in CM \Leftrightarrow 5.\dfrac{-1+a}{2}+7.\dfrac{2+b}{2}-20=0 \Leftrightarrow 5a+7b-31=0$
Tọa độ M là nghiệm của hệ:

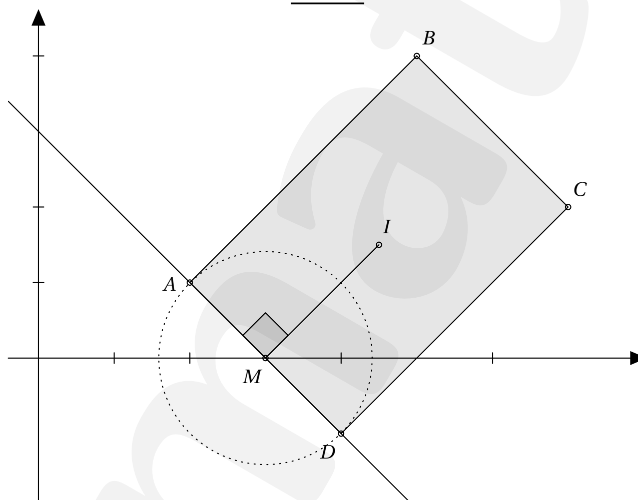
$$\begin{cases}5a-2b=4\\5a+7b=31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=3\end{cases} \Rightarrow B(2;3)$$

Phương trình cạnh BC là: $(BC): 3x+2y-12=0$ □



Bài 8. *Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, $I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là tâm của hình chữ nhật và $M(3;0)$ là trung điểm của cạnh AD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.*

Giải:



Do MI là đường trung bình của tam giác ABD nên $AB=2MI=2\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}}=3\sqrt{2}$

Vì $S_{ABCD}=AB.AD=12$ nên $AD=\dfrac{12}{AB}=2\sqrt{2}\Rightarrow MA=MD=\sqrt{2}$

Đường thẳng AD qua $M(3;0)$ và nhận $\overrightarrow{IM}=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ làm VTPT có phương trình là:

$$\frac{3}{2}(x-3)+\frac{3}{2}(y-0)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$$

Phương trình đường tròn tâm M bán kính $R=\sqrt{2}$ là: $(x-3)^2+y^2=2$

Tọa độ A và D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y-3=0\\(x-3)^2+y^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3-x\\(x-3)^2+(3-x)^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}$$

Suy ra: ta chọn $A(2;1)$, $D(4;-1)$

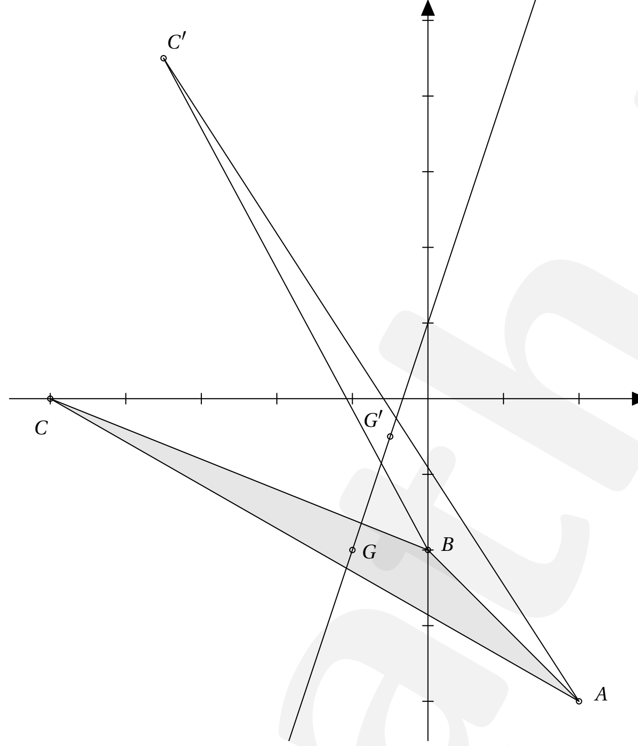
Vì I là trung điểm của AC nên: $\begin{cases}x_C=2x_I-x_A=9-2=7\\y_C=2y_I-y_A=3-1=2\end{cases} \Rightarrow C(7;2)$

Vì I là trung điểm của BD nên: $\begin{cases}x_B=2x_I-x_D=5\\y_B=2y_I-y_D=4\end{cases} \Rightarrow B(5;4)$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là $A(2;1)$, $B(5;4)$, $C(7;2)$, $D(4;-1)$. □

Bài 9. *Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;-4)$, $B(0;-2)$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $3x-y+1=0$. Hãy tìm tọa độ của C biết rằng tam giác ABC có diện tích bằng 3.*

Giải:



Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên: $S_{\Delta GAB}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.3=1$

Phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+4}{2}\Leftrightarrow x+y+2=0$

Đặt $G(a;b)$, do $G\in(d):3x-y+1=0$ nên $3a-b+1=0$, ta có:

$$S_{\Delta GAB}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}.AB.d(G,AB)=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2\sqrt{2}.d(G,AB)=1$$

$$\Leftrightarrow d(G,AB)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{|a+b+2|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow a+b+2=\pm1$$

Tọa độ G là nghiệm của hệ: $\begin{cases}3a-b=-1\\a+b=-1\end{cases}\vee\begin{cases}3a-b=-1\\a+b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$

Suy ra: $G\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ hoặc $G(-1;-2)$

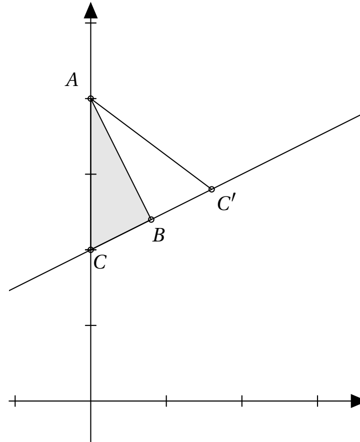
Với $G\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ thì $\begin{cases}x_C=3x_G-(x_A+x_B)=-\dfrac{7}{2}\\y_C=3y_G-(y_A+y_B)=\dfrac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow C\left(-\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right)$

Với $G(-1;-2)$ thì $\begin{cases}x_C=3x_G-(x_A+x_B)=-5\\y_C=3y_G-(y_A+y_B)=0\end{cases}\Rightarrow C(-5;0)$

Vậy có hai điểm C thỏa đề bài là : $C(-5;0)$ và $C\left(-\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right)$ □

Bài 10. *Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $(d): x-2y+2=0$. Tìm trên đường thẳng (d) hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và $AB=2BC$.*

Giải:



Từ yêu cầu của bài toán ta suy ra B là hình chiếu vuông góc của A trên (d) Phương trình đường thẳng (Δ) qua A và vuông góc với (d) là: $2x+y+m=0$

$A(0;2)\in(\Delta)\Leftrightarrow 2+m=0\Leftrightarrow m=-2$ Suy ra: $(\Delta): 2x+y-2=0$

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+y=2\\x-2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\y=\dfrac{6}{5}\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right)$$

Đặt $C(2t-2;t)\in(d)$, theo giả thiết ta có:

$$AB=2BC\Leftrightarrow AB^2=4BC^2$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}-0\right)^2+\left(\frac{6}{5}-2\right)^2=4\left[\left(2t-\frac{12}{5}\right)^2+\left(t-\frac{6}{5}\right)^2\right]$$
$$\Leftrightarrow 2t^2-12t+7=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\Rightarrow C(0;1)\\t=\dfrac{7}{5}\Rightarrow C\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{7}{5}\right)\end{array}\right.$$

Vậy các điểm cần tìm là: $B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right), C(0;1)$ hoặc $B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right), C\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$ □

Bài 11. *Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1;-1)$ và hai đường thẳng $d_1: x-y-1=0$, $d_2: 2x+y-5=0$ Gọi A là giao điểm của d_1, d_2. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt d_1, d_2 lần lượt ở B và C sao cho ba điểm A, B, C tạo thành tam giác có $BC=3AB$.*

Giải:

Tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-y=1\\2x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\Rightarrow A(2;1)$

Lấy điểm $E(3;2)\in d_1$ $(E\neq A)$. Ta tìm trên d_2 điểm F sao cho $EF=3AE$.

Đặt $F(m;5-2m)$. Khi đó:

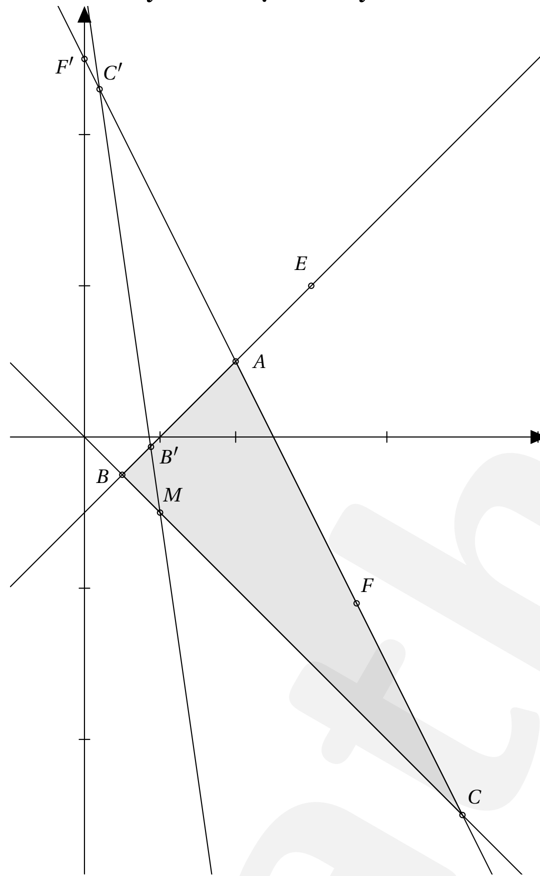
$$EF=3AE\Leftrightarrow(m-3)^2+(3-2m)^2=18\Leftrightarrow 5m^2-18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\dfrac{18}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}F(0;5)\\F\left(\dfrac{18}{5};-\dfrac{11}{5}\right)\end{array}\right.$$

Vì $BC=3AB$ và $EF=3AE\Rightarrow\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AE}{AB}\Rightarrow BC//EF\Rightarrow\Delta//EF$

Với $F(0;5)\Rightarrow\overrightarrow{EF}=(-3;3)\Rightarrow\Delta: x+y=0$

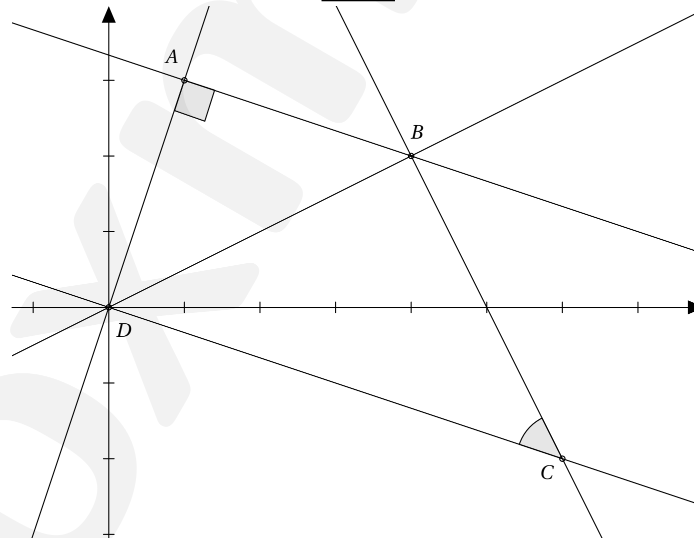
Với $F\left(\frac{18}{5};-\frac{11}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \left(\frac{3}{5};-\frac{21}{5}\right) \Rightarrow \Delta: 7x+y-6=0$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là: $x+y=0$ hoặc $7x+y-6=0$. □



Bài 12. *Cho hình thang ABCD vuông tại A và D có đáy lớn là CD, $\widehat{BCD} = 45^o$, đường thẳng AD có phương trình $3x - y = 0$ và đường thẳng BD có phương trình $x - 2y = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 15 và điểm B có hoành độ dương.*

Giải:



$D = (AD) \cap (BD) \Rightarrow D(0;\ 0)$ $\cos(AD, BD) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_{AD}}.\overrightarrow{n_{BD}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{AD}}.\right|.\left|.\overrightarrow{n_{BD}}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ADB} = 45^o$

Suy ra tam giác ABD, BCD vuông cân $\Rightarrow AB = AD = \dfrac{CD}{2}$

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AB + CD)AD = \dfrac{3}{2}AB^2 = 15 \Rightarrow AB = \sqrt{10} \Rightarrow BD = 2\sqrt{5}$

Ta có $B\left(b;\ \dfrac{b}{2}\right) \in d: x - 2y = 0$ với $b > 0$

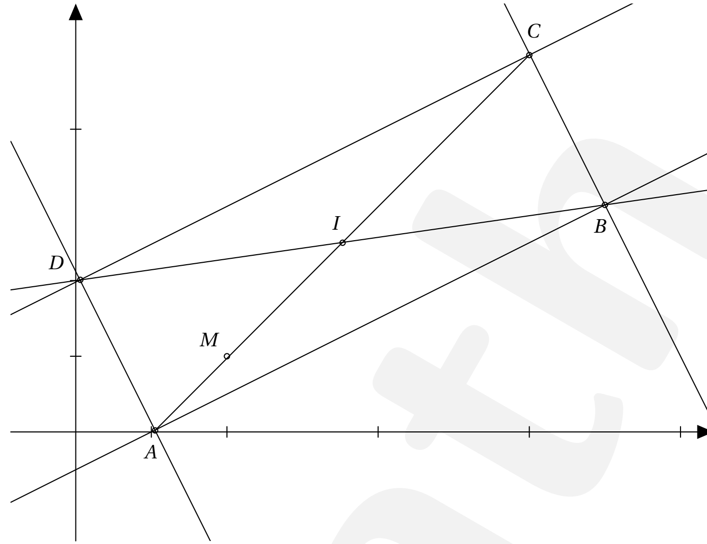
boxmath.vn

$$BD = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow B(4;\ 2). \quad (BC): 2(x-4) + 1(y-2) = 0$$

Vậy phương trình đường thẳng $BC: 2x + y - 10 = 0$ □

Bài 13. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ biết đường thẳng AB có phương trình $x - 2y - 1 = 0$, đường thẳng BD có phương trình $x - 7y + 14 = 0$ và đường thẳng AC đi qua điểm$M(2;1)$ .Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.*

Giải:



Ta có . $B = (AB) \cap (BD) \Rightarrow B(7;\ 3)$ Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc AB nên có phương trình

$$2(x-7) + 1(y-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 17 = 0$$

Ta có $A \in AB \Rightarrow A(2a+1; a), C \in BC \Rightarrow C(c; 17-2c), a \neq 3, c \neq 7,$

Suy ra tâm I của hình chữ nhật $I\left(\frac{2a+1+c}{2};\ \frac{a+17-2c}{2}\right)$.

Ta có I$\in BD \Leftrightarrow 3c - a - 18 = 0 \Leftrightarrow a = 3c - 18 \Rightarrow A(6c-35; 3c-18)$

Vì M, A, C thẳng hàng$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}$ cùng phương $\left[\begin{array}{l} c = 7 \quad \text{(loai)} \\ c = 6 \end{array}\right.$

Vậy : $A(1;0), C(6;5), D(0;2), B(7;3)$ □

Bài 14. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;2)$, đường thẳng $\Delta_1: x + y - 3 = 0$ và đường thẳng$\Delta_2: x + y - 9 = 0$. Biết điểm B thuộc Δ_1 và điểm C thuộc Δ_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A. Tìm tọa độ điểm B và C.*

Giải:

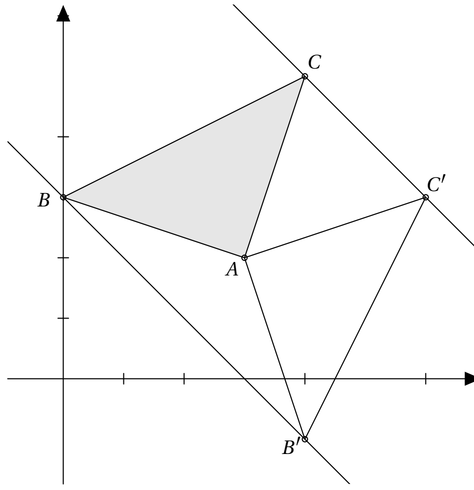
Ta có $B \in \Delta_1 \Rightarrow B(a;\ 3-a)$, $C \in \Delta_2 \Rightarrow C(b;\ 9-b)$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(b-3) + (1-a)(7-b) = 0 \\ (a-3)^2 + (b-3)^2 = a^2 + (7-b)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab - 10a - 4b + 16 = 0 \\ 2a^2 - 8a = 2b^2 - 20b + 48 \end{cases}$ $a = 2$ không là nghiệm của hệ trên.

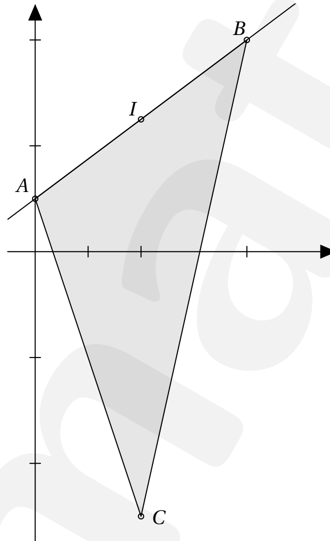
$(1) \Leftrightarrow b = \frac{5a-8}{a-2}$, thay vào phương trình $(2) \Rightarrow a = 0,\ a = 4$

Vậy tọa độ điểm $\left[\begin{array}{l} B(0;\ 3)\ ,\ C(4;\ 5) \\ B(4;\ -1)\ ,\ C(6;\ 3) \end{array}\right.$ □



Bài 15. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $C(2;-5)$ và đường thẳng $\Delta: 3x-4y+4=0$. Tìm trên đường thẳng Δ hai điểm A và B đối xứng nhau qua điểm $I\left(2;\frac{5}{2}\right)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 15.*

Giải:



Gọi $A\left(a;\dfrac{3a+4}{4}\right) \Rightarrow B\left(4-a;\dfrac{16-3a}{4}\right)$.

Khi đó diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d(C,\Delta)=3AB$.

Theo giả thiết ta có $AB=5 \Leftrightarrow (4-2a)^2+\left(\dfrac{6-3a}{2}\right)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=0 \end{array}\right.$

Vậy hai điểm cần tìm là $A(0;1), B(4;4)$ hoặc $A(4;4), B(0;1)$. □

Bài 16. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba đường thẳng $d_1: 2x+y+3=0$; $d_2: 3x-2y-1=0$; $\Delta: 7x-y+8=0$. Tìm điểm $P\in d_1$ và $Q\in d_2$ sao cho Δ là đường trung trực của đoạn thẳng PQ.*

Giải:

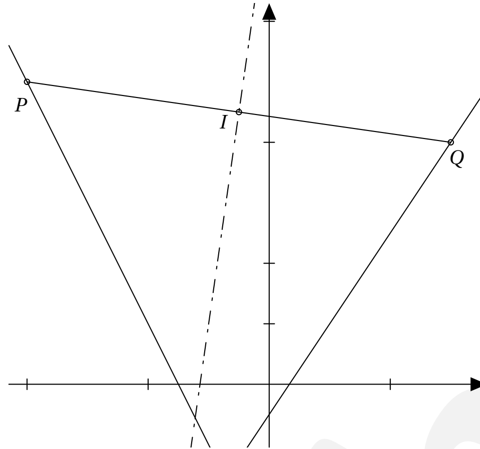
$P\in d_1: 2x+y+3=0 \Rightarrow P(x_1\,;-2x_1-3)$. $\quad Q\in d_2: 3x-2y-1=0 \Rightarrow Q\left(x_2\,;\dfrac{3x_2-1}{2}\right)$.

Suy ra trung điểm PQ là $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\,;\,\dfrac{-4x_1+3x_2-7}{4}\right)$ và $\overrightarrow{PQ}\left(x_2-x_1\,;\,\dfrac{3x_2+4x_1+5}{2}\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow P$ và Q đối xứng nhau qua $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} I\in\Delta \\ \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{PQ}=0 \end{cases}$

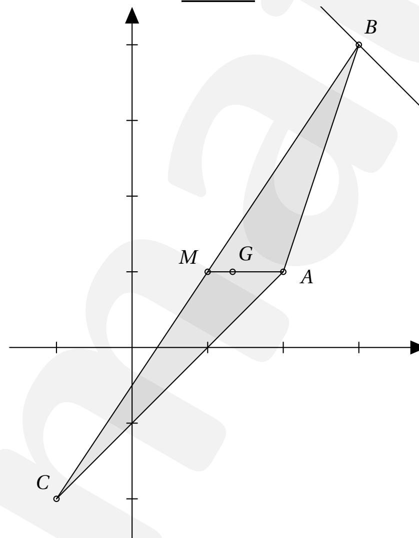
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7.\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{4x_1+3x_2+5}{2}=0 \\ 1.(x_2-x_1)+7.\dfrac{3x_2+4x_1+5}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x_1+11x_2+39=0 \\ 26x_1+23x_2+35=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-4 \\ x_2=3 \end{cases}$$

Suy ra $P(-4\,;\,5)$, $Q(3\,;\,4)$. □



Bài 17. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\dfrac{4}{3};1\right)$, trung điểm BC là $M(1;1)$, phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B là $x+y-7=0$. Tìm tọa độ A,B,C.*

<u>Giải:</u>



Từ tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MG}\Rightarrow A(2;\ 1)$.

$B\in BH: y=-x+7\Rightarrow B(b,-b+7)$.

Vì $M(1;\ 1)$ là trung điểm BC nên $C(2-b;\ b-5)$. Suy ra $\overrightarrow{AC}=(-b;\ b-6)$.

$BH\perp AC$ nên $\overrightarrow{u_{BH}}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow b+(b-6)=0\Leftrightarrow b=3$. Suy ra $B(3;\ 4)$, $C(-1;\ -2)$.

Vậy $A(2;\ 1), B(3;\ 4)$, $C(-1;\ -2)$. □

Bài 18. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Đường cao kẻ từ A,trung tuyến kẻ từ B, trung tuyến kẻ từ C lần lượt nằm trên các đường thẳng có phương trình $x+y-6=0$, $x-2y+1=0$, $x-1=0$. Tìm tọa độ A, B, C.*

<u>Giải:</u>

Từ hệ $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x-1=0 \end{cases}$ suy ra trọng tâm $G(1;\ 1)$.

$A\in AH$, $B\in BM$, $C\in CN\Rightarrow A(a;\ 6-a)$, $B(2b-1;\ b)$, $C(1;\ c)$.

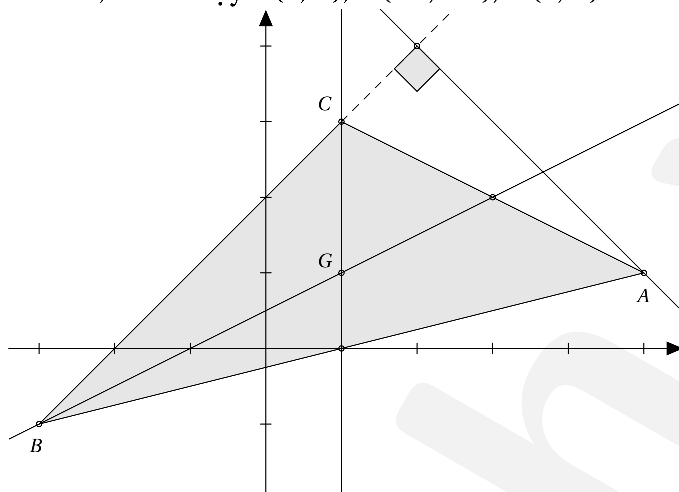
boxmath.vn

Do $G(1;\ 1)$ là trọng tâm nên $\begin{cases} a+(2b-1)+1=3 \\ (6-a)+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=3 \\ -a+b+c=-3 \end{cases}$ (1)

Ta có $\overrightarrow{u_{AH}}=(1;-1)$, $\overrightarrow{BC}=(2-2b;\ c-b)$. Vì $AH\perp BC$ nên

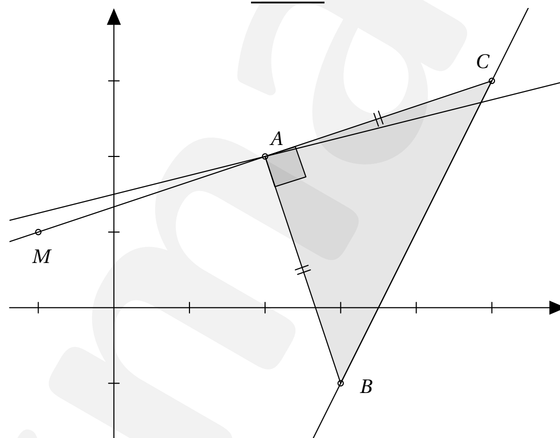
$$\overrightarrow{u_{AH}}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow 2-2b-c+b=0 \Leftrightarrow b+c=2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a=5,\ b=-1,\ c=3$. Vậy $A(5;\ 1)$, $B(-3;\ -1)$, $C(1;\ 3)$. □



Bài 19. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A, phương trình BC : $2x-y-7=0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(-1;\ 1)$, điểm A nằm trên đường thẳng $\Delta: x-4y+6=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đỉnh A có hoành độ dương.*

Giải:



Vì $A\in\Delta: x-4y+6=0 \Rightarrow A(4a-6;\ a) \Rightarrow \overrightarrow{MA}(4a-5;\ a-1)$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $\widehat{ACB}=45^o$.

Do đó
$$\left|\cos(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{u_{BC}})\right|=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|(4a-5)+2(a-1)|}{\sqrt{(4a-5)^2+(a-1)^2}.\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 13a^2-42a+32=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=\dfrac{16}{13} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(2;\ 2) \\ A\left(-\dfrac{14}{13};\ \dfrac{16}{13}\right) \text{ (không thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

Vậy $A(2;\ 2)$. Suy ra $AC: x-3y+4=0$, $AB: 3x+y-8=0$. Từ đó ta có $B(3;-1)$, $C(5;\ 3)$. □

Bài 20. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC, phương trình các đường thẳng chứa đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A lần lượt là $x-2y-13=0$ và $13x-6y-9=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C biết tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(-5;\ 1)$.*

Giải:

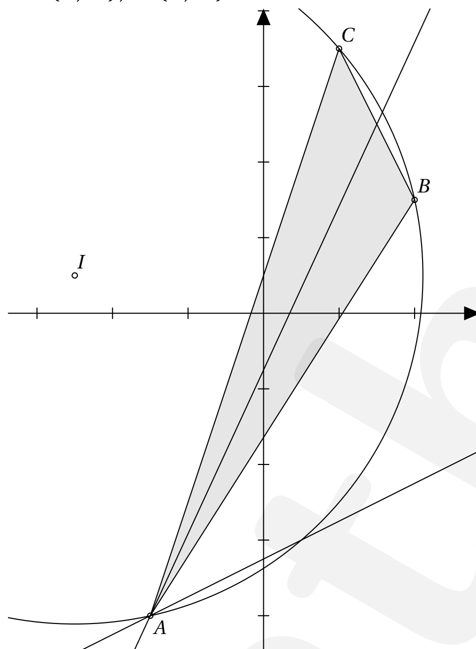
Ta có $A(-3;\ -8)$. Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow IM \parallel AH$. Ta suy ra pt $IM: x-2y+7=0$.

Nên tọa độ M thỏa mãn $\begin{cases} x-2y+7=0 \\ 13x-6y-9=0 \end{cases} \Rightarrow M(3;\ 5)$.

Pt đường thẳng $BC: 2(x-3)+y-5=0 \Leftrightarrow 2x+y-11=0$. $B\in BC \Rightarrow B(a;\ 11-2a)$.

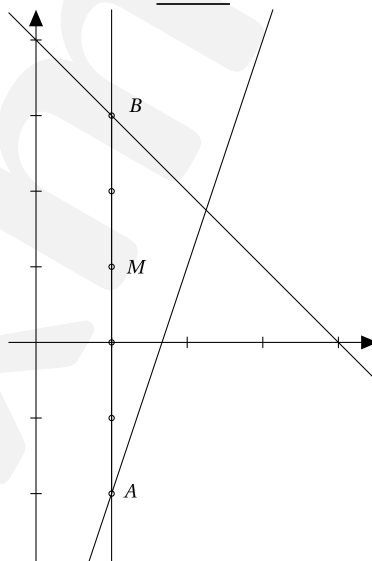
Khi đó $IA=IB \Leftrightarrow a^2-6a+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=2 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $B(4;\ 3)$, $C(2;\ 7)$ hoặc $B(2;\ 7)$, $C(4;\ 3)$. □



Bài 21. *Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 3x-y-5=0$, $d_2: x+y-4=0$. và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua M và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho $2MA-3MB=0$.*

Giải:



$A\in d_1 \Rightarrow A(x_1;3x_1-5)$, $B\in d_2 \Rightarrow B(x_2;\ 4-x_2)$.

Vì A,B,M thẳng hàng và $2MA=3MB \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB} & (1) \\ 2\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB} & (2) \end{array}\right.$

Ta có $\overrightarrow{MA}=(x_1-1;\ 3x_1-6)$, $\overrightarrow{MB}=(x_2-1;\ 3-x_2)$.

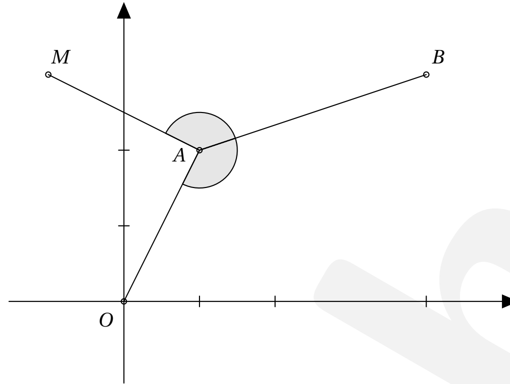
$(1) \Leftrightarrow 2(x_1-1;\ 3x_1-6)=3(x_2-1;\ 3-x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{5}{2} \\ x_2=2 \end{cases}$ Suy ra $A\left(\dfrac{5}{2};\ \dfrac{5}{2}\right)$, $B(2;\ 2)$.

Suy ra phương trình $d: x - y = 0$. (2) $\Leftrightarrow 2(x_1 - 1;\ 3x_1 - 6) = -3(x_2 - 1;\ 3 - x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Suy ra $A(1;\ -2)$, $B(1;\ 3)$. Nên phương trình $d: x - 1 = 0$. □

Bài 22. *Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho các điểm $A(1;\ 2)$, $B(4;\ 3)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\widehat{MAB} = 135^o$ và khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.*

Giải:



Giả sử $M(x;\ y)$. Kẻ $MH \perp AB$. Từ giả thiết suy ra $MH = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ và ΔMAH vuông cân.
Suy ra $AM = MH\sqrt{2} = \sqrt{5}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}) = 135^0 \\ AM = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3(x-1) + 1(y-2)}{\sqrt{10}.\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \cos 135^0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases}$

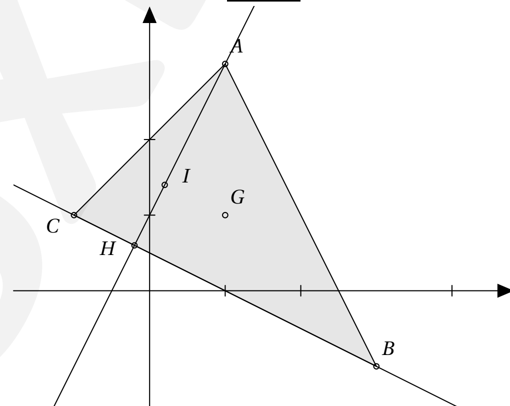
Đặt $u = x - 1,\ v = y - 2$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} 3u + v = -5 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1,\ v = -2 \\ u = -2,\ v = 1 \end{array}\right.$$

Vậy $M(0;\ 0)$ hoặc $M(-1;\ 3)$ □

Bài 23. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(1;\ 1)$; đường cao từ đỉnh A có phương trình $2x - y + 1 = 0$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x + 2y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết diện tích tam giác ABC bằng 6.*

Giải:



Tọa độ chân đường cao $H\left(-\dfrac{1}{5};\ \dfrac{3}{5}\right)$. Đường thẳng d đi qua G và song song BC có pt $d: x + 2y - 3 = 0$.
$d \cap AH = I \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{5};\ \dfrac{7}{5}\right)$. Ta có $\overrightarrow{HA} = 3\overrightarrow{HI} \Rightarrow A(1;\ 3)$. $d(A,\ BC) = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.
Suy ra $BC = \dfrac{2S_{ABC}}{d(A,\ BC)} = 2\sqrt{5}$. Gọi M là trung điểm BC. Khi đó $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow M(1;\ 0)$.

Gọi $B\left(x_1; \dfrac{-x_1+1}{2}\right)$. Khi đó $MB=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x_1-1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_1=-1. \end{array}\right.$

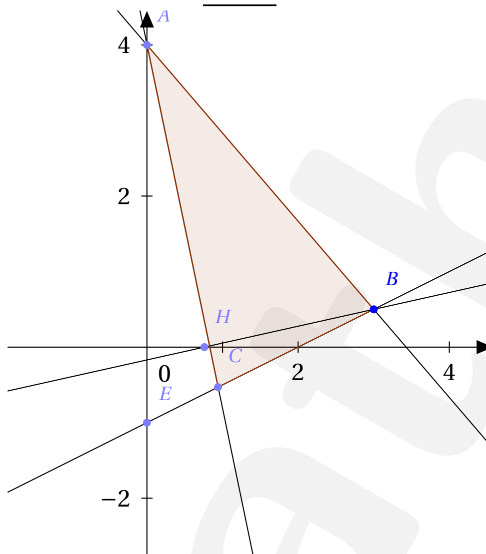
+) Với $x_1=3 \Rightarrow B(3;-1) \Rightarrow C(-1;1)$.

+) Với $x_1=-1 \Rightarrow B(-1;1) \Rightarrow C(3;-1)$.

Suy ra $A(1;3)$, $B(3;-1)$, $C(-1;1)$ hoặc $A(1;3)$, $B(-1;1)$, $C(3;-1)$. □

Bài 24. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC cân tại A.Đường thẳng AB và BC lần lượt có phương trình: $7x+6y-24=0; x-2y-2=0$. Viết phương trình đường cao kẻ từ B của tam giác ABC.*

Giải:



Ta có tọa độ $B(3;\frac{1}{2})$

Gọi vecto pháp tuyến của phương trình AC là $\vec{n}(a;b)$ Do tam giác ABC cân tại A nên ta có:

$\cos B=\cos C \Leftrightarrow \dfrac{|7-12|}{\sqrt{7^2+6^2}.\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{1^2+2^2}} \Leftrightarrow \sqrt{85}.|a-2b|=5\sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{9b}{2}$ hoặc $a=\dfrac{7b}{6}$ (loại vì song song với AB)

Với $a=\dfrac{9b}{2}$ chọn $a=9; b=2$ ta có phương trình đường cao kẻ từ B là: (qua B và nhận $\vec{n}$ là vecto chỉ phương)

$$\frac{x-3}{9}=\frac{y-\frac{1}{2}}{2} \Rightarrow 4x-18y-3=0$$

Kết luận: Vậy phương trình đường cao kẻ từ B là: $4x-18y-3=0$ □

Bài 25. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông tại B, có phương trình đường cao qua C $: 2x+y+4=0$, đường phân giác trong góc A có phương trình $d_A: x-y-1=0$. Gọi $M(0;-2)$ nằm trên cạnh AC . Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C của tam giác đó.*

Giải:

- Gọi N là điểm đối xứng với M qua phân giác d_A.

Theo tính chất phân giác trong thì N thuộc đường thẳng BA.

* Xác định tọa độ N:

Ta có phương trình đường thẳng $MN: x+y+2=0$

Nên tọa độ giao điểm của đường thẳng MN và AD là $I(\frac{-1}{2};\frac{-3}{2})$. Do đó tọa độ $N(-1;-1)$.

* Phương trình đường thẳng AB: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1} \Leftrightarrow x-2y-1=0$

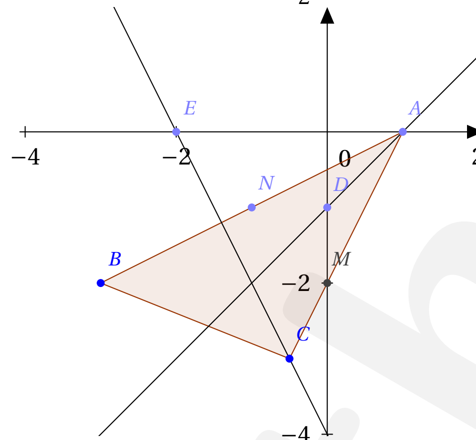
Do đó tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ Nên $A(1;0)$

Suy ra ta có phương trình đường thẳng $AC: \dfrac{x-1}{1} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow 2x-y-2=0$

Nên tọa độ C thảo mãn hệ: $\begin{cases} 2x+y+4=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$. Suy ra $C(\frac{-1}{2};-3)$

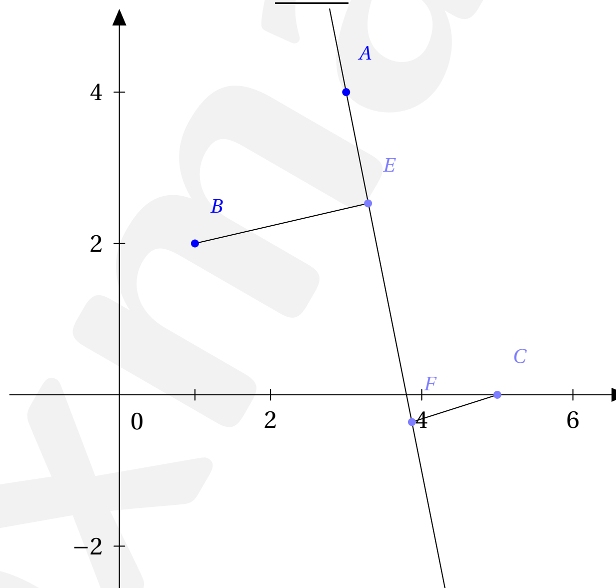
Vì $AB = 2AM$ nên $AB = 2AN$ (do $AM = AN$) nên N là trung điểm của AB . suy ra $B(-3:-2)$

Kết luận: Vậy tọa độ các đỉnh là: $A(1;0); B(-3:-2); C(\frac{-1}{2};-3)$ □



Bài 26. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho 3 điểm $A(3;4)$, $B(1;2)$,$C(5;0)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(3;4)$ sao cho : $d = 2d(B;d) + d(C;d)$ đạt giá trị lớn nhất .*

Giải:



Gọi phương trình đường thẳng qua A cần tìm là : $a(x-3)+b(y-4)=0, \quad (a^2+b^2 \neq 0) \quad (\Delta)$

Ta có:

$$\begin{cases} 2.d_{(B,\Delta)} = \dfrac{|-4a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ d_{(C;\Delta)} = \dfrac{|2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Do đó:

$$A = 2d_{(B;\Delta)} + d_{(C;\Delta)} = \frac{|-4a-4b|+|2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Xét TH 1:

B và C cùng phía với $(\Delta) \Leftrightarrow (-4a-4b)(2a-4b) \geq 0 \quad (*)$

Ta có: $A = \dfrac{|2a-8|}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 2\sqrt{17}$ (1). Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{-2} = \dfrac{b}{-8} \Leftrightarrow \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{4}$.
Chọn $(a = 1; b = 4)$ thỏa mãn $(*)$
Vậy phương trình đường thẳng: $x + 4y - 19 = 0$.
Xét TH 2:
B và C khác phía với $(\Delta) \Leftrightarrow (-4a-4b)(2a-4b) \le 0$ $(**)$
Ta có: $A = \dfrac{|-6a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = d_{(I;\Delta)}$ (với $I(2:4)$)
Ta thấy rằng đường thẳng (Δ) qua A và chạy từ C đến B (do B và C khác phía với (Δ))
Do đó $d_{(I;\Delta)}$ max $\Leftrightarrow$ (Δ) qua A và vuông góc với Ox . Khi đó $(\Delta): x = 3$. và $A = 1$ (2)
Từ (1) và (2) ta có $A_{max} = 2\sqrt{17}$.
Kết luận: Phương trình đường thẳng: $x + 4y - 19 = 0$. □

Bài 27. *Tam giác ABC có trung tuyến $BM: 2x + y - 3 = 0$; phân giác trong $BN: x + y - 2 = 0$. Điểm $P(2;1)$ thuộc AB ,bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \sqrt{5}$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác .*

Giải:

Từ phương trình trung tuyến BM và phân giác BN ta suy ra tọa độ điểm $B(1;1)$
Vì $P(2;1)$ thuộc AB nên ta suy ra phương trình AB (đi qua B và P) là: $y = 1$. Đặt $A(a;1)$.
Ta viết phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với $BN.x - y + 1 - a = 0$.
Cho đường này giao với BN ta tìm được toạ độ của $H(\frac{a+1}{2};\frac{3-a}{2}) \Rightarrow$ điểm D là điểm đối xứng của A qua H và $D \in BC$. $D(1;2-a)$.
Từ đó có : $\overrightarrow{BD} = (0;1-a)$ và $\overrightarrow{AB} = (1-a;0)$ suy ra $BD \perp AB$ suy ra tam giác ABC vuông tại B.
Đặt $M(m;3-2m)$ thì ta có : $BM = AM$ (trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông)

$$\Rightarrow (m-a)^2 + (2-2m)^2 = (m-1)^2 + (2-2m)^2 \Rightarrow m = \frac{a+1}{2} \text{ (vì } a\neg 1)$$

+Thế m và chú ý rằng $BM = AM = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow (1-a)^2 + \frac{(1-a)^2}{4} = 5 \Rightarrow (1-a)^2 = 4 \Leftrightarrow a = 3 \text{ hoặc } a = -1$$

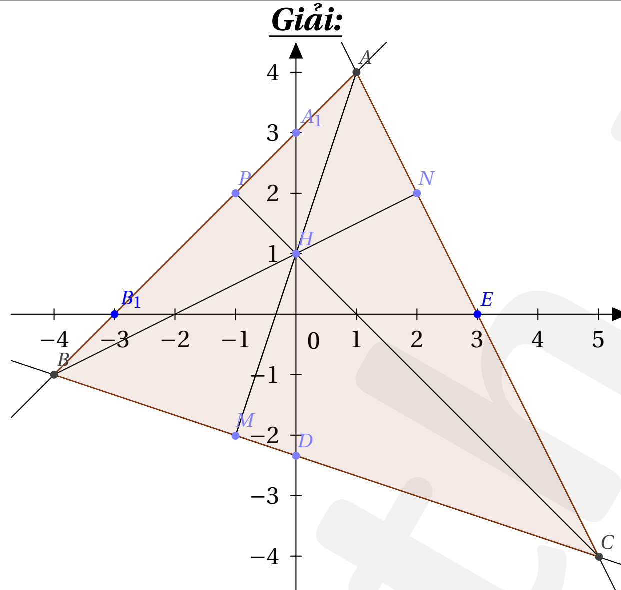
Với $a = 3$ thì $A(3;0); C(1;-8)$

Với $a=-1$ thì $A(-1;1);C(1;8)$

Kết luận: Vậy bài toán có hai họ nghiệm: $A(3;1);B(1;1);C(1;-8)$ và $A(-1;1);B(1;1);C(1;8)$ □

Bài 28. *Cho tam giác ABC có 3 góc đều nhọn. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AC của tam giác , biết tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh $A;B;C$ tương ứng là: $M(-1;-2);N(2;2);P(-1;2)$.*

Giải:



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Một hệ quả quen thuộc, nếu H là trực tâm của tam giác ABC thì H cũng là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MNP với M,N,P lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A,B,C (Ta dễ dàng chứng minh hệ quả này bằng tứ giác nội tiếp)

Theo tọa độ 3 điểm M,N,P đã biết ta dễ dàng viết được phương trình các đường thẳng:

$$MN: 4x-3y-2=0, \quad NP: y-2=0, \quad MP: x+1=0$$

Tới đây ta có thể làm theo hai cách để tìm tọa độ điểm H

Cách 1:

Vì H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP nên : $d(H;MP)=d(H;PN)=d(H,MN)$.

Gọi $H(x;y)$ ta có: $\dfrac{|x+1|}{1}=\dfrac{|y-2|}{1}=\dfrac{|4x-3y-2|}{5}$

Giải ra ta được $H(0;1)$

Cách 2:

Dễ dàng ta viết được phương trình đường phân giác trong của các góc:$\widehat{PNM};\widehat{MPN}$

Phân giác góc: $\widehat{PNM}: 4x-8y+8=0$. Phân giác góc: $\widehat{MPN}: x+y-1=0$.

Tọa độ điểm H là giao điểm của 2 phương trình đường thẳng trên $\Rightarrow H(0;1)$

Phương trình đường thẳng AB qua $P(-1;2)$ nhận $\overrightarrow{HP}$ làm pháp tuyến:$x-y+3=0$

Phương trình đường thẳng BC qua $M(-1;-2)$ nhận $\overrightarrow{HM}$ làm pháp tuyến:$x+3y+7=0$

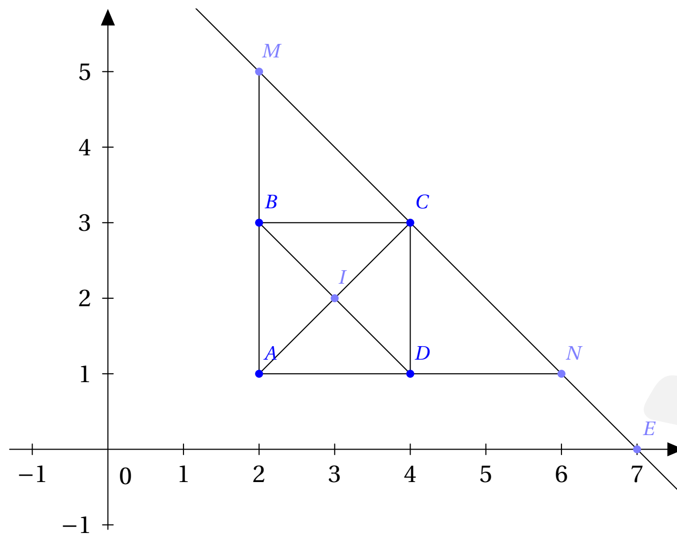
Phương trình đường thẳng AC qua $N(2;2)$ nhận $\overrightarrow{HN}$ làm pháp tuyến:$2x+y-6=0$

Kết luận: Vậy phương trình các cạnh của tam giác ABC là:

$AB: x-y+3=0; BC: x+3y+7=0; AC: 2x+y-6=0$ □

Bài 29. *Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông $ABCD$ cố định, biết $A(2;1), I(3;2)$ (I là giao điểm của AC và BD). Một đường thẳng d đi qua C cắt các tia AB, AD lần lượt tại M và N. Viết phương trình đường thẳng d sao cho độ dài MN là nhỏ nhất.*

Giải:



Cách 1:

Vì I là trung điểm AC nên ta suy ra được tọa độ điểm $C(4;3)$

Các cạnh AB, AD có phương trình:$x-2=0$ và $y-1=0$

Chuyển hệ trục toạ độ Oxy sang hệ trục JXY qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OJ}$ với $J(2;1)$.

Công thức đổi trục: $\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y+1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y-1 \end{cases}$

Trong hệ JXY ta có $A(0;0); C(2;2)$ và 2 cạnh AB, AD trùng với 2 trục toạ độ $X=0$ và $Y=0$

Không mất tính tổng quát giả sử $M(m;0); N(0,n)$ $(m>0; n>0)$. $\Rightarrow MN = \sqrt{m^2+n^2}$

Phương trình đưởng thẳng $MN: \dfrac{X}{m} + \dfrac{Y}{n} = 1$ (Δ)

Do $C(2;2) \in (\Delta) \Rightarrow \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2}$

Ta có $$\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \geq \frac{4}{m+n} \Rightarrow m+n \geq 8 \Rightarrow MN = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(m^2+n^2)} \geq \frac{m+n}{\sqrt{2}} \geq 4\sqrt{2}$$

$\Rightarrow MN$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $m=n=4$

Khi đó $(\Delta): X+Y-4=0$. Trong hệ Oxy phương trình đường thẳng $(\Delta): x+y-7=0$

Kết luận:Vậy đường thẳng $x+y-7=0$ thoả mãn điều kiện bài toán □

Cách 2:

Đặt $\widehat{CMB} = \widehat{NCD} = x$. Gọi độ dài cạnh hình vuông là a

Tam giác CMB vuông tại B và tam giác CDN vuông tại D

Có $$MN = MC + CN = \frac{a}{sinx} + \frac{a}{cosx} = a\left(\frac{1}{sinx} + \frac{1}{cosx}\right)$$

Dùng AM-GM cho 2 số không âm $\dfrac{1}{sinx}, \dfrac{1}{cosx}$

Ta có $$\frac{1}{sinx} + \frac{1}{cosx} \geq \frac{2}{\sqrt{sinx.cosx}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{sin2x}}$$

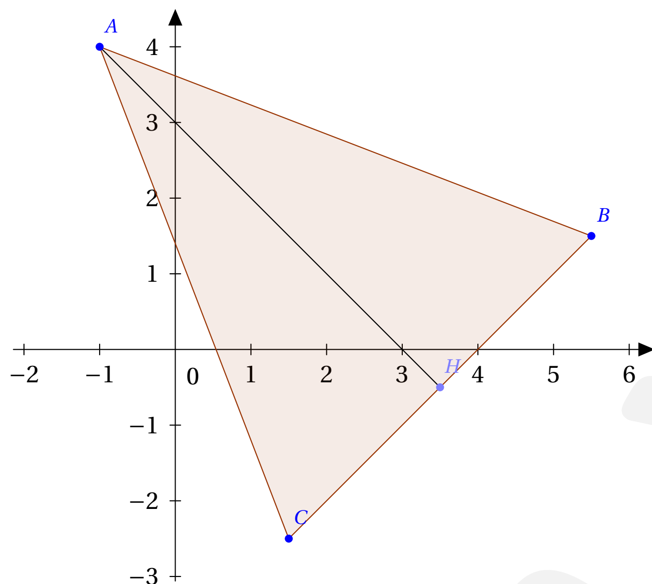
Mà $sin2x \leq 1$ nên $x = 45$

Vậy $MN \perp AC$. Phương trình đường thẳng MN qua $C(4;3)$ nhận $\overrightarrow{AC}$ làm pháp tuyến: $x+y-7=0$

Kết luận: Vậy đường thẳng $x+y-7=0$ thoả mãn điều kiện bài toán □

Bài 30. *Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và các đỉnh B,C thuộc đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$. Xác định tọa độ các điểm B,C biết tam giác ABC có diện tích bằng 18.*

Giải:



Gọi H là trung điểm BC thì $AH \perp BC \Rightarrow AH: x+y-3=0 \Rightarrow H\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Gọi $B(x,x-4)$ (Vì $B \in BC$) $\Rightarrow C(7-x,3-x)$(Vì H là trung điểm BC)

Vì tam giác ABC có diện tích bằng 18. $\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}.d(A,\Delta).BC=18 \Rightarrow BC=4.\sqrt{2}$

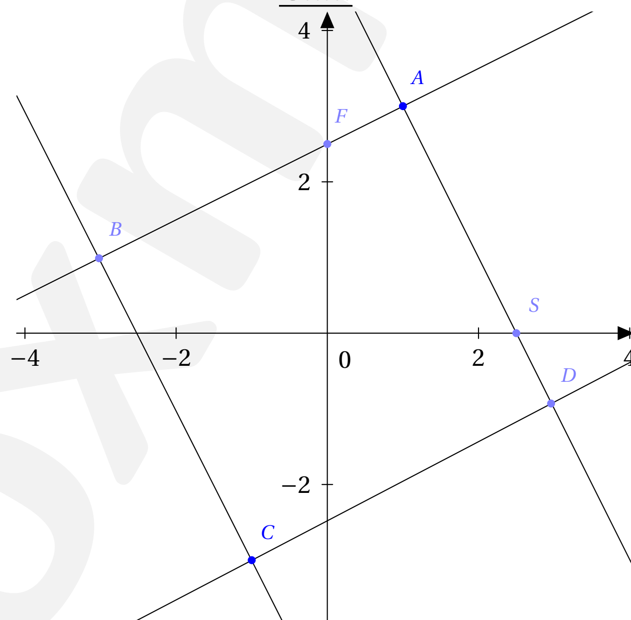
Nên ta có : $(x-7+x)^2+(x-4-3+x)^2=32 \Rightarrow x=\frac{11}{2}$ hoặc $x=\frac{3}{2}$

Do đó $B\left(\frac{11}{2},\frac{3}{2}\right)$ hoặc $B\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow C\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$ hoặc $C\left(\frac{11}{2},\frac{3}{2}\right)$

Kết luận: Vậy: $B\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right);C\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$ hoặc $B\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right);C\left(\frac{11}{2},\frac{3}{2}\right)$ □

Bài 31. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy viết phương trình 4 cạnh của hình vuông không song song với các trục tọa độ, có tâm O và 2 cạnh kề lần lượt đi qua $M(-1;2);N(3;-1)$.*

Giải:



Không mất tính tổng quát, giả sử AB đi qua $M(-1;2)$ và AD đi qua $N(3;-1)$.

Gọi véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\overrightarrow{n}=(a;b)$ với a,b đồng thời khác 0 (điều này do 4 cạnh của hình vuông không song song với các trục tọa độ).

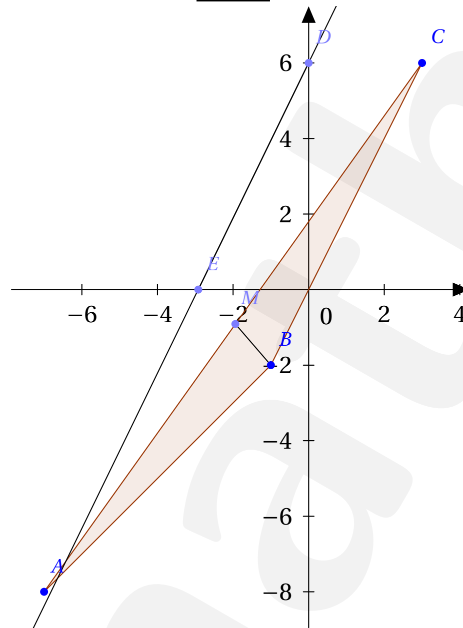
Khi đó: $AB: a(x+1)+b(y-2)=0$ và $AD: b(x-3)-a(y+1)=0$.

Ta có $d(O;AB)=d(O;AD) \Leftrightarrow \frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-3b-a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Từ đó ta có $2a = -b$ (loại đo trường hợp $b = 0$), chon $a = 1, b = -2$.
Ta có phương trình của $AB : x - 2y + 5 = 0$, của $AD : 2x + y - 5 = 0$.
Từ đó tìm điểm $A(1;3)$ là giao của AB, AD. Điểm C đối xứng A qua O nên $C(-1;-3)$.
Từ đó phương trình của $CD : x - 2y - 5 = 0$, của $CB : 2x + y + 5 = 0$.
Kết luận: Phương trình các cạnh là:
$AB : x - 2y + 5 = 0$, $AD : 2x + y - 5 = 0$ $CD : x - 2y - 5 = 0$, $CB : 2x + y + 5 = 0$. □

Bài 32. *Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có $A \in (d) : 2x - y + 6 = 0$, đường trung tuyến $(BM) : x + y + 3 = 0$, trung điểm cạnh BC là $N(1;2)$. Tính S_{ABC} biết $BC \parallel (d)$.*

Giải:



Vì: $BC//(d)$ và BC qua N nên $BC : 2x - y = 0$
Ta có: N là giao điểm của BC và $BM \Rightarrow B(-1,-2) \Rightarrow C(3,6)$ (Vì N là trung điểm BC).
$M \in BM \Rightarrow M(m, -m-3) \Rightarrow A(2m-3, -2m-12)$
Mặt khác $A \in d \Rightarrow m = -2 \Rightarrow A(-7,-8)$. Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}d(A, BC).BC = \dfrac{3}{20}$
Kết luận: Vậy diện tích tam giác là: $S_{ABC} = \dfrac{3}{20}$ □

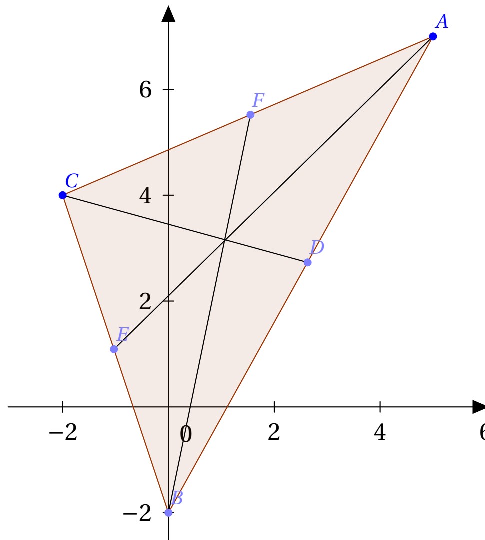
Bài 33. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng 24 và phương trình các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là*

$$\Delta_1 : x - y + 2 = 0, \quad \Delta_2 : 5x - y - 2 = 0, \quad \Delta_3 : x + 3y - 10 = 0.$$

Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải:

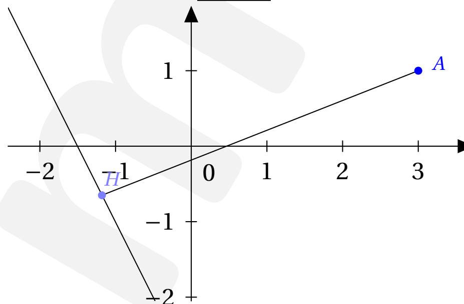
Gọi tọa độ điểm $B(a;5a-2); C\left(b;\dfrac{10-b}{3}\right)$.
Gọi M là trung điểm của AB thì tọa độ $M\left(\dfrac{a+b}{2};\dfrac{15a-b+4}{6}\right)$
Vì điểm M thuộc trung tuyến qua A, nên thay tọa độ trên và rút gọn ta được: $b = 3a - 1$.
Thay vào trên ta có: $C(3a-2;4-a)$ Suy ra: $\overrightarrow{BC} = (2a-2;6-6a)$
Ta dễ dàng tìm được: $S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta GBC} = 24 \Rightarrow S_{\Delta GBC} = 8$



Ta viết được phương trình đường thẳng BC là: $(x-a)(6a-6)+(y-5a+2)(2a-2)=0$
Từ đây suy ra: $a\neq 1$, và ta rút gọn lại thành: $6(x-a)+2(y-5a+2)=0$.
Thay vào công thức diện tích là: $S_{\Delta GBC}=8\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}d(G,BC).BC=8$.
Suy ra: $|a-1|=1\Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=2$
Với: $a=0$, suy ra tọa độ các điểm là: $B(0;-2);C(-2;4),A(5;7)$
Với: $a=2$, suy ra tọa độ các điểm là: $B(2;8);C(4;2);A(-3;-1)$
Kết luận: Bài toán có hai kết quả là: $B(0;-2);C(-2;4),A(5;7)$ hoặc $B(2;8);C(4;2);A(-3;-1)$ □

Bài 34. *Xác định m để khoảng cách từ điểm $A(3,1)$ đến đường thẳng $(\Delta): x+(m-1)y+m=0$ là lớn nhất.Tìm giá trị lớn nhất đó.*

Giải:

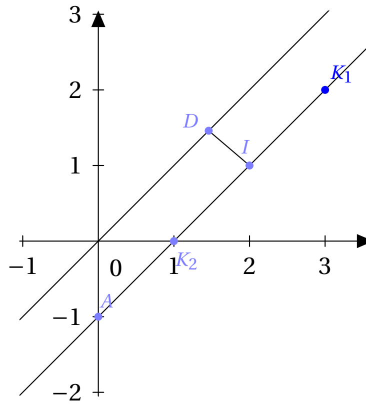


Ta có: $$d(M;\Delta)=\frac{2|m+1|}{\sqrt{(m-1)^2+1}}=\frac{2\sqrt{5}|m+1|}{\sqrt{[(m-1)^2+1^2)(1^2+2^2)}}\le\frac{2\sqrt{5}|m+1|}{\sqrt{(m+1)^2}}=2\sqrt{5}$$
Dấu = xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{m-1}{1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$
Kết luận: Vậy $m=\dfrac{3}{2}$ □

Bài 35. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng 2 , AB có phương trình $x-y=0$, $I(2,1)$ là trung điểm của BC. Tìm tọa độ trung điểm K của AC.*

Giải:

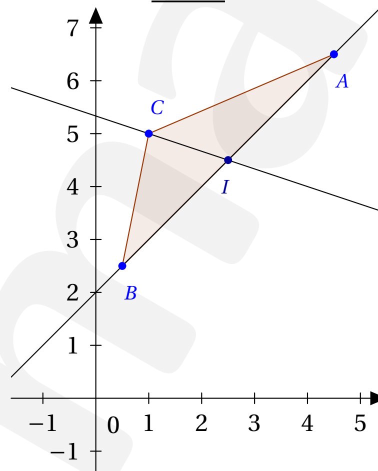
Ta có $$d(I,AB)=\frac{2-1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Vì I là trung điểm của $BC\Rightarrow d(C,AB)=2;d(I,AB)=\sqrt{2}$



Từ diện tích tam giác $ABC = 2$ nên ta suy ra được cạnh $AB = 2\sqrt{2}$.
KI là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow KI = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$
Phương trình đường thẳng KI song song với AB là: $x - y + m = 0$
Mà $I(2;1) \Rightarrow m = -1$. Suy ra phương trình $KI : x - y - 1 = 0$
Giả sử $K(a, a-1)$. $KI^2 = 2 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (a-2)^2 = 2$ $a = 3$ hoặc $a = 1$. Suy ra $K(3;2)$ hoặc $K(1;0)$
Kết luận:Vậy trung điểm K của AC có tọa độ là: $K(3;2); K(1;0)$ □

Bài 36. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có cạnh $AB = 4\sqrt{2}$ và đỉnh $C(1;5)$. Đường thẳng AB có phương trình $x - y + 2 = 0$, đường thẳng $(d) : x + 3y - 16 = 0$ đi qua trọng tâm G của tam giác. Tìm tọa độ các đỉnh A, B.*

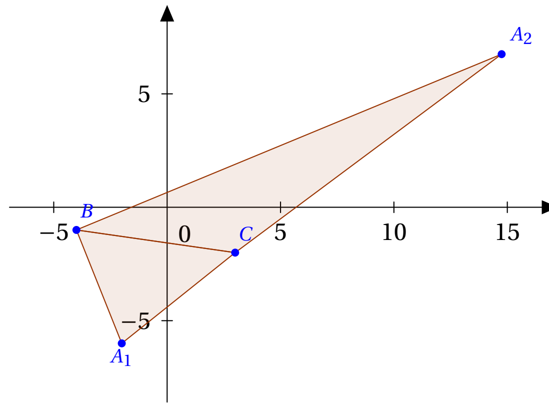
Giải:



Thay tọa độ điểm $C(1;5)$ vào phương trình $(d) : x + 3y - 16 = 0$ thấy thỏa mãn.
Suy ra (d) là đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh C
Gọi I là trung điểm AB⇒ I là giao điểm của (d) và $(AB) \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$
Gọi tọa độ điểm $A(x_o, x_o + 2) \Rightarrow B(5 - x_o, 7 - x_o) \Rightarrow AB^2 = 2(2x_o - 5)^2 = 32 \Leftrightarrow x_o = \frac{9}{2}$ hoặc $x_o = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow A\left(\frac{9}{2}; \frac{13}{2}\right); B\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Hoặc ngược lại (Vì A và B có vai trò như nhau).
Kết luận:Vậy $A\left(\frac{9}{2}; \frac{13}{2}\right); B\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ hoặc $B\left(\frac{9}{2}; \frac{13}{2}\right); A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ □

Bài 37. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết $B(-4;-1), C(3;-2)$, diện tích tam giác ABC bằng $\frac{51}{2}$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $(d) : x - y + 2 = 0$. Hãy tìm tọa độ đỉnh A.*

Giải:



Gọi $G(t;t+2)\in(d)$. Gọi M là trung điểm của BC, ta có $M\left(\frac{-1}{2};\frac{-3}{2}\right)$.

BC đi qua B,C nên $BC:\quad x+7y+11=0$

$$S_{\Delta GMC}=\frac{1}{2}GK.MC=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}AH\frac{1}{2}BC=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{6}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{6}\cdot\frac{51}{2}=\frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}GK.MC=\frac{17}{4}\Leftrightarrow GK=\frac{17}{2.MC}=\frac{17}{2\frac{5\sqrt{2}}{2}}=\frac{17}{5\sqrt{2}}.$$

Nên: $GK=d(G,BC)=\dfrac{t+7(t+2)+11}{5\sqrt{2}}=\dfrac{17}{5\sqrt{2}}\Leftrightarrow|8t+25|=17\Leftrightarrow t=-1\quad$ hoặc $\quad t=\dfrac{-21}{4}$.

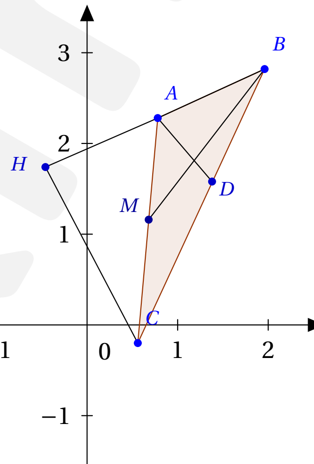
Suy ra $G_1(-1;1),\quad G_2\left(\dfrac{-21}{4};\dfrac{-13}{4}\right)$

Tiếp tục sử dụng đẳng thức : $\overrightarrow{AG}=2.\overrightarrow{GM}$ suy ra điểm $A_1(-2;-6),\quad A_2\left(\dfrac{-59}{4};\dfrac{-27}{4}\right)$.

Kết luận:Vậy có 2 tọa độ đỉnh A thỏa mãn điều kiện đề bài là: $A_1(-2;-6),\quad A_2\left(\dfrac{-59}{4};\dfrac{-27}{4}\right)$ □

Bài 38. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC . Đường phân giác góc A có phương trình $x+y-3=0$, đường trung tuyến từ B có phương trình $x-y+1=0$ đường cao kẻ từ C có phương trình $2x+y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.*

Giải:



Gọi các đường thẳng đã cho lần lượt là: $AD;BM;CH$, và gọi tọa độ các điểm như sau:

$$A\in AD\Rightarrow A(a;3-a);\ B\in BM\Rightarrow B(b;b+1);\ C\in CH\Rightarrow C(c;-2c-1)$$

Khi đó ta có tọa độ điểm M là trung điểm của AC là: $M\left(\dfrac{a+c}{2};\dfrac{2-a-2c}{2}\right)$ Mà $M\in BM$, nên thay M vào phương trình BM, ta được: $2a+3c=0\quad(1)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(b-a;a+b-2)$. Do CH là đường cao có $\overrightarrow{u}=(1;-2)$,

nên ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}=0\Leftrightarrow 3a+b=4\quad(2)$

Ta để ý rằng: $AD\perp BM=I$, nên I chính là trung điểm của BM.

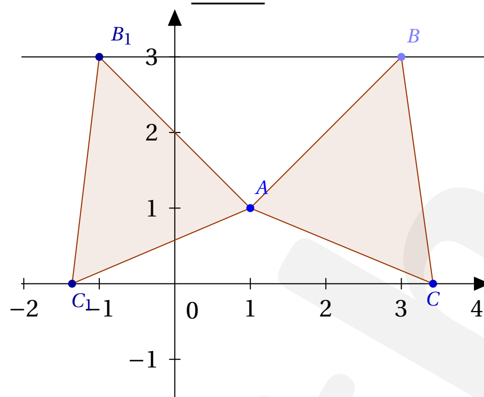
Tọa độ $I\left(\dfrac{a+2b+c}{4};\dfrac{-a+2b-2c+4}{4}\right)$. Ta có: $I\in AD \Rightarrow 4b-c=8(3)$.

Kết hợp $(1);(2);(3)$ ta thu được hệ 3 phương trình 3 ẩn, giải ra ta được: $a=\dfrac{12}{17};b=\dfrac{32}{17};c=-\dfrac{8}{17}$

Kết luận: Vậy tọa độ 3 đỉnh của ΔABC là: $A\left(\dfrac{12}{17};\dfrac{39}{17}\right);B\left(\dfrac{32}{17};\dfrac{49}{17}\right);C\left(\dfrac{-8}{17};\dfrac{-1}{17}\right)$ □

Bài 39. *Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(1;1)$. Hãy tìm điểm B trên đường thẳng $y=3$ và điểm C trên trục hoành sao cho ΔABC đều.*

Giải:



Ta có: B thuộc đường thẳng $y=3\Rightarrow B(a;3)$, và C thuộc $Ox\Rightarrow C(b;0)$

Vì ΔABC đều nên: $\begin{cases} AB=AC \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)^2-(b-1)^2=3 \\ \dfrac{(a-1)(b-1)-2}{(a-1)^2+4}=\frac{1}{2}\end{cases}$

Coi đây là hệ phương trình hai ẩn là $a-1$ và $b-1$ (dễ thấy hệ đưa về hệ đẳng cấp)

Đặt $b-1=k(a-1)$, thay vào ta được: $k_1=\dfrac{5}{4}$ và $k_2=\dfrac{-1}{2}$

+ Với $k_1=\dfrac{5}{4}$ thì $b-1=\dfrac{5}{4}(a-1)$, thay vào hệ thấy vô nghiệm.

+ Với $k_2=\dfrac{-1}{2}$, thay vào hệ ta được: $a-1=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ hoặc $a-1=\dfrac{-4}{\sqrt{3}}$

Kết luận:Vậy tồn tại hai cặp điểm B,C để ΔABC đều:

$B\left(\dfrac{3+4\sqrt{3}}{3};3\right);C\left(\dfrac{3+5\sqrt{3}}{3};0\right)$ và $B\left(\dfrac{3-4\sqrt{3}}{3};3);C(\dfrac{3-5\sqrt{3}}{3};0\right)$ □

Bài 40. *Trong mặt phẳng Oxy cho hình thoi $ABCD$ biết phương trình của một đường chéo là: $3x+y-7=0$ và điểm $B(0;-3)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi biết diện tích của hình thoi bằng 20.*

Giải:

Rõ ràng B không thuộc đường chéo đã cho nên ta có $AC:3x+y-7=0$.

Vì BD đi qua B đồng thời vuông góc với AC nên phương trình của BD là : $x-3y-9=0$

Tọa độ tâm I của hình thoi là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases}x-3y-9=0 \\ 3x+y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3 \\ y=-2\end{cases}$$

Từ đó : $I(3,-2)$, lại do D đối xứng với B qua I nên tìm được : $D(6,-1)$.

Từ : $S_{ABCD}=20=2.IB.IA$, chú ý với : $IB=\sqrt{10}$ ta có được : $IA=\sqrt{10}$.

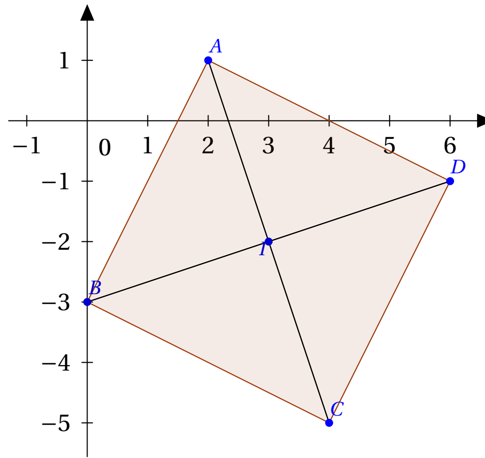
Giả sử A có tọa độ : $A(a,7-3a)$. Khi đó : $IA=\sqrt{(a-3)^2+(9-3a)^2}=\sqrt{10}$

Giải phương trình ta được: $a=4$ hoặc $a=2$

Như vậy, ta có : $A(4,-5),A(2;1)$, do C đối xứng với A qua I nên tìm được : $C(2,1),C(4,-5)$.

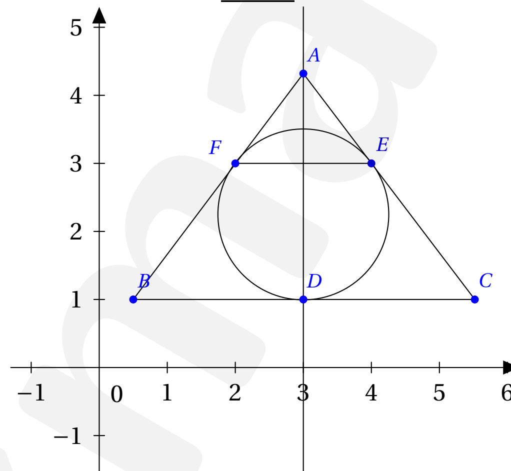
Kết luận:Vậy tọa độ 3 đỉnh còn lại của hình thoi là:

$A(4,-5); D(6,-1); C(2,1)$ hoặc $A(2;1); C(4;-5); D(6;-1)$ □



Bài 41. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh* $B(\frac{1}{2};1)$. *Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC, AC, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Cho* $D(3;1)$ *và đường thẳng EF có phương trình* $y-3=0$. *Tìm tọa độ đỉnh A biết A có tung độ dương.*

Giải:



Vì BC đi qua $B(\frac{1}{2};1)$ và $D(3;1)$ nên phương trình được thẳng BC có dạng: $\frac{5}{2}(y-1)=0 \Leftrightarrow y-1=0$

Mà đường thẳng EF có phương trình $y-3=0$. $\Rightarrow EF \parallel BC$

Vậy ΔABC cân tại $A \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow AD$ có phương trình: $\frac{5}{2}(x-3)=0 \Leftrightarrow x-3=0$

Gọi $F(x,3)$.(Vì $F \in EF$). Dễ thấy $BF = BD = \frac{5}{2} \Rightarrow F(2,3)$ hoặc $F(-1,3)$ (loại vì khác phía với C, D so với B) $\Rightarrow BF$ có dạng: $4x-3y+1=0$

Mà A là giao điểm của BF và $AD \Rightarrow$ A$(3,\frac{13}{3})$ (nhận)

Kết luận: Vậy tọa độ đỉnh A thỏa mãn điều kiện là: $A(3,\frac{15}{3})$ □

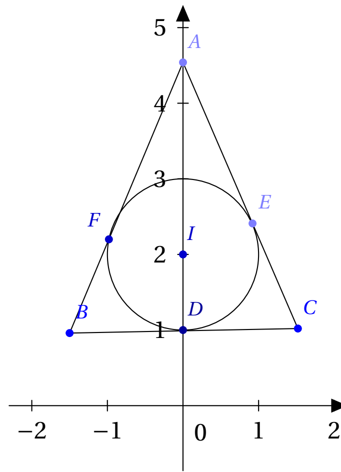
Chú ý :Lí giải tại sao $BF = BD; AF = AE; CD = CE$

Ta có: $\Delta AFI = \Delta AEI$ vì: AI chung và $IF = IE = r$ $\quad(*)$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AE = AF \quad (1)$. Vì EF song song $BD \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC}$

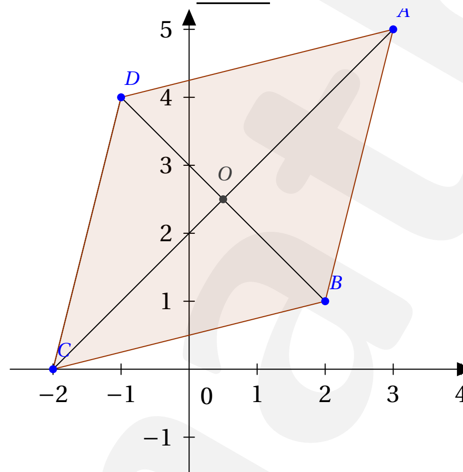
kết hợp với $(1) \Rightarrow AB = AC \Rightarrow$ tam giác ABC lại cân tại A.

Ta cũng lần lượt xét các tam giác giống $(*)$ để có: $BF = BD$ và $CD = CE$



Bài 42. *Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $d_1: 4x+y-9=0, d_2: 2x-y+6=0, d_3: x-y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$, biết hình thoi $ABCD$ có diện tích bằng 15, các đỉnh A, C thuộc d_3, B thuộc d_1 và D thuộc d_2.*

Giải:



Do B, D lần lượt thuộc d_1, d_2 nên ta có tọa độ của B, D lần lượt là : $B(b, 9-4b); D(d, 2d+6)$.
Gọi O là tâm của hình thoi, hiển nhiên O là trung điểm của BD và O thuộc AC.
Từ đó ta dễ dàng thiết lập được phương trình :

$$\frac{b+d}{2}-\frac{15-4b+2d}{2}+2=0 \Leftrightarrow 5b-d=11$$

Bây giờ sử dụng $AC \perp BD$ thu được phương trình :

$$\frac{d-b}{1}=\frac{4b+2d-3}{-1} \Leftrightarrow b+d=1$$

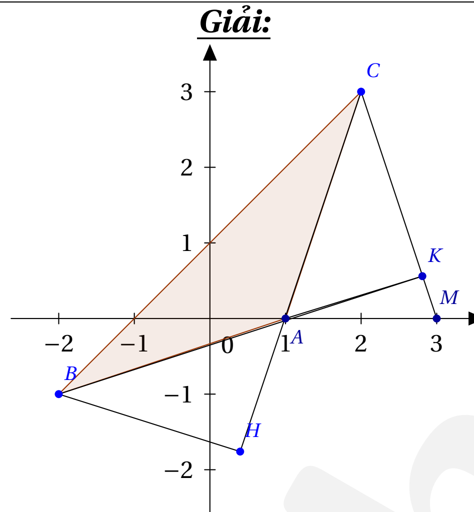
Từ đây giải hệ tìm được ngay b, d suy ra : $B(2,1), D(-1,4)$.
Bây giờ giả sử : $A(a, a+2), C(c, c+2)$.
Trung điểm O của BD cũng chính là trung điểm của AC nên dễ dàng suy ra : $a+c=1$.
Ta tính được : $BD=3\sqrt{2},\ AC=|a-c|\sqrt{2}=|2a-1|\sqrt{2}$ đồng thời ta có :

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD=3|2a-1|=15$$

Từ đây dễ dàng có được : $a=3, a=-2$. Suy ra tọa độ : $A(3;5); C(-2;0)$
Kết luận: Vậy tọa độ các đỉnh của hình thoi là: $A(3;5); B(2,1); C(-2;0); D(-1,4)$ □

Bài 43. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC cân tại A, cạnh $BC: x-y+1=0$, đường cao hạ từ đỉnh B là: $x+3y+5=0$. Đường cao hạ từ đỉnh C đi qua $M(3;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.*

Giải:



Gọi $BH: x+3y+5=0$.

Do $B = BC \cap BH$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+3y+5=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(-2;-1)$$

Gọi CK là đường thẳng đi qua M và vuông góc với AB có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(a;b)$.

Lúc đó ta có phương trình CK :

$$a(x-3)+by=0 \Leftrightarrow ax+by-3a=0 \quad (a^2+b^2 \neq 0)$$

Mặt khác ta có $\Delta BHC = \Delta CKB$ (cạnh huyền ; góc nhọn) $\Rightarrow \widehat{HBC} = \widehat{KCB}$.

Từ đây ta có

$$\cos\widehat{HBC} = \cos\widehat{KCB} \Leftrightarrow \cos(\widehat{BH,BC}) = \cos(\widehat{CK,BC}) \quad (1)$$

Mặt khác ta có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}}=(1;-1)$, vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BH}}=(1;3)$.

Từ (1) ta có :

$$\frac{|\overrightarrow{n_{BH}}.\overrightarrow{n_{BC}}|}{|\overrightarrow{n_{BH}}|.|\overrightarrow{n_{BH}}|} = \frac{|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n_{BC}}|}{|\overrightarrow{n}|.|\overrightarrow{n_{BC}}|} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2}.\sqrt{10}} = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{10}|a-b|$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2+b^2) = 10(a^2-2ab+b^2) \Leftrightarrow 3a^2-10ab+3b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ a=\frac{1}{3}b \end{array}\right.$$

Với $a=3b$ ta chọn $a=3; b=1$. Lúc đó phương trình $CK: 3x+y-9=0$ (nhận)

Với $a=\frac{1}{3}b$ ta chọn $a=1; b=3$. Lúc đó phương trình $CK: x+3y-3=0$ (loại vì $BH||CK$)

Mặt khác ta có $C = BC \cap CK$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x+y-9=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow C(2;3)$$

Lại có $AB \perp CK$. Suy ra vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_{AB}} = \overrightarrow{n_{CK}} = (3;1)$.

Mà $B \in AB$ nên ta có phương trình AB :

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} \Leftrightarrow x-3y-1=0$$

Do $AC \perp BH$. Suy ra vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_{AC}} = \overrightarrow{n_{BH}} = (1;3)$.
Lại có $C \in AC$ nên ta có phương trình AC :

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} \Leftrightarrow 3x - y - 3 = 0$$

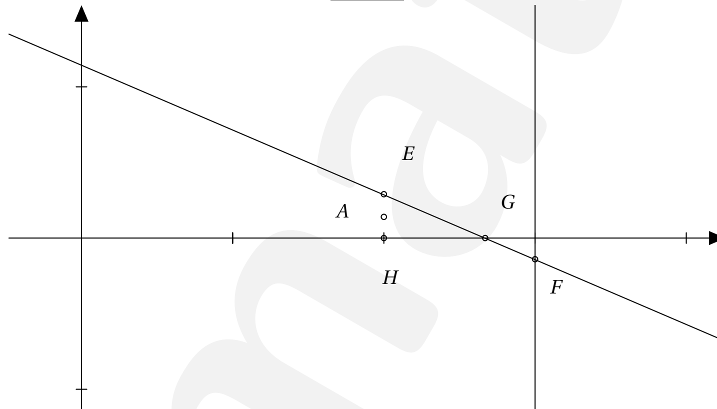
Vì $A = AB \cap AC$ nên ta có tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;0)$$

Kết luận:Vậy tọa độ các đỉnh của tam giác ΔABC là: $A(1;0); B(-2;-1); C(2;3)$ □

Bài 44. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(2;0)$, phương trình đường trung tuyến $CM : 3x + 7y - 8 = 0$, phương trình đường trung trực của $BC : x - 3 = 0$. Tìm tọa độ của đỉnh A.*

Giải:

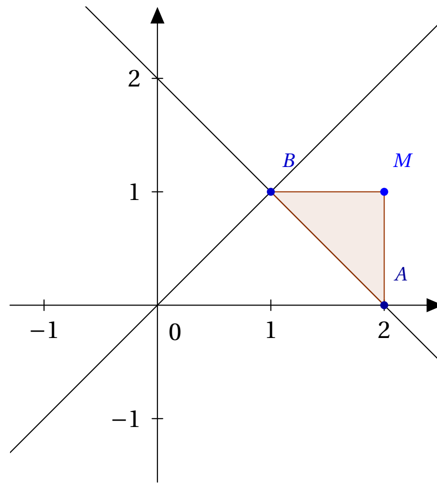


PQ là trung trực BC (P thuộc BC).
Ta có: $CM : 3x + 7y - 8 = 0$, $PQ : x - 3 = 0$, $AH : x - 2 = 0$ (do $AH \parallel PQ$ và $H(2;0)$)
Gọi E, F lần lượt là giao của CM với AH, PQ. Suy ra tìm được $E\left(2;\frac{2}{7}\right)$ và $F\left(3,-\frac{1}{7}\right)$
Nối AP cắt CM tại G là trọng tâm tam giác ABC.
Để ý thấy $EG = 2GF$ do tam giác AEG đồng dạng tam giác PFG. Suy ra $G\left(\frac{8}{3};0\right)$
Nếu gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $2GI = HG$(đường thẳng euler).
Suy ra $I(3;0)$. Biểu diễn A, P còn 1 ẩn theo pt đường thẳng: $A(2; y_A); P(3; y_P)$
Có $y_A + y_B + y_C = 2.y_P + y_A = 3y_G$ và $AE = 2EF$ ta được hệ pt : $\begin{cases} y_A + 2y_P = 0 \\ \frac{1}{2}y_A - y_E = \frac{1}{7} \end{cases}$ Suy ra $y_A = \frac{1}{7}$

Kết luận: Vậy tọa độ điểm $A\left(2;\frac{1}{7}\right)$ □

Bài 45. *Trong mặt phẳng Oxy cho $(d) : x - y = 0$ và $M(2,1)$. Tìm phương trình (d_1) cắt trục hoành tại A và cắt (d) tại B sao cho tam giác AMB vuông cân tại M.*

Giải:



Gọi $A(a;0)$ thuộc trục hoành, $B(b;b)$ thuộc d. Tam giác AMB vuông cân tại M nên ta có:

$$\begin{cases} MA = MB \\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a = 2b^2 - 6b \\ ab - 2a - 3b + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3b-5}{b-2} \\ (3b-a)^2 - 4(3b-5)(b-2) = 2b(b-3)(b-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3b-5}{b-2} \\ (b-1)(b-2)(b^2-2b+4) = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 1; a = 2$$

Suy ra $A(2;0)$ và $B(1;1)$ Phương trình $d_1 : x + y - 2 = 0$
Kết luận: Vậy phương trình $d_1 : x + y - 2 = 0$ □

Bài 46. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $B(1,2)$ phân giác trong $AK : 2x + y - 1 = 0$. Khoảng cách từ C đến AK bằng 2 lần khoảng cách từ B đến AK. Tìm tọa độ đỉnh A, C biết C thuộc trục tung.*

Giải:

Ta có:

$$d(B, AK) = \frac{|2.1 + 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Vì $C \in Oy \Rightarrow C(0, y)$ Theo giả thiết ta có: Khoảng cách từ C đến AK bằng 2 lần khoảng cách từ B đến AK nên ta có:

$$d(C, AK) = 2dB(AK) \Longleftrightarrow \frac{|2.0 + y - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}. \Longleftrightarrow |y - 1| = 6. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 7 \\ y = -5 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy: $C(0,7)$ Gọi C' đối xứng với C qua AK thì $C\left(-\dfrac{24}{5}, \dfrac{23}{5}\right)$ và $C' \in BA$
Từ đây ta dễ dàng viết được phương trình đường thẳng $BA : 13x + 29y - 71 = 0$
Vì $A \in AK, A \in AB \Rightarrow A\left(-\dfrac{14}{15}, \dfrac{43}{15}\right)$
Kết luận:Vậy tọa độ đỉnh A là:$A\left(-\dfrac{14}{15}, \dfrac{43}{15}\right)$ □

Bài 47. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với đường cao kẻ từ đỉnh B và phân giác trong của góc A có phương trình lần lượt là $x - 2y - 2 = 0$ và $x - y - 1 = 0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB và $AB = 2AC$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.*

Giải:

Đặt $(AP): x-y-1=0$; $(BK): x-2y-2=0$

•Gọi H là hình chiếu của M trên AP.

Ta có $M(0;2)\in MH$ và $\overrightarrow{n}_{MH}=\overrightarrow{u}_{AP}=(1;1)\Rightarrow (MH): x+y-2=0$.

H là giao điểm của AP và MH , tọa độ của nó là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$$

•Gọi M' là điểm đối xứng với M qua AP, H là trung điểm của MM'.

Suy ra $M'(3;-1)$, mà $M'(3;-1)\in AM'$ và $\overrightarrow{n}_{AM'}=\overrightarrow{u}_{BK}=(2;1)\Rightarrow (AM'): 2x+y-5=0$.

•Ta có $A\in AM'\Rightarrow \boxed{A(2;1)}$

$\Rightarrow (AM): x+2y-2=0$, $B\in AM\Rightarrow \boxed{B(2;0)}$

Gọi $C(c;5-2c)\in AM'$.

Theo giả thiết $AB=2AC\Rightarrow C\left(2-\frac{1}{\sqrt{5}};1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ hoặc $C\left(2+\frac{1}{\sqrt{5}};1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ □

Bài 48. *Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(1;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(2;0)$ và $A(3;4)$. Viết phương trình của đường thẳng BC.*

Giải:

Nhận xét: Hẳn không ít người khi đọc tựa đề lên sẽ nghĩ ngay đến công thức $Euler$ trong tam giác để áp dụng trong bài này. Nhưng trên thực tế công thức này muốn sử dụng trong khi thi Đại học-Cao đẳng thì phải chứng minh nó trước. Như vậy, ta phải lựa chọn con đường khác để làm bài này. Chẳng hạn

Dựng đường tròn (C)ngoại tiếp ΔABC. Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua I, suy ra $A'\in(C)$ và I là trung điểm của AA'. Do đó $A'(1;-4)$.

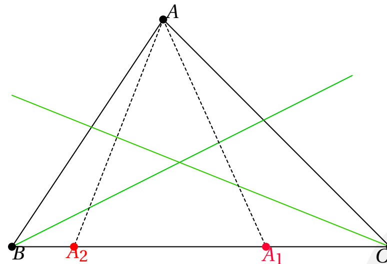
Dễ dàng chứng minh được $A'BHC$ là hình bình hành $(BH\parallel A'C, HC\parallel A'B)$.

Gọi M là giao điểm của BC và $A'H$, suy ra M là trung điểm của $AH' \Rightarrow M\left(1;-\frac{1}{2}\right)$.

Như vậy ta có $M(1;-\frac{1}{2}) \in BC$ và $BC \perp AH \Rightarrow$ PT của $\boxed{BC: 4x+2y-3=0}$. □

Bài 49. *Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(-3;5)$ và hai đường phân giác trong của ΔABC lần lượt là $(d_1): x+y-2=0, (d_2): x-3y-6=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.*

Giải:



Dễ dàng kiểm tra được rằng điểm A không thuộc d_1 và d_2 nên d_1, d_2 là hai phân giác trong xuất phát từ hai đỉnh B, C.
Gọi A_1 và A_2 lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm A qua d_1 và d_2.
Ta tiến hành tìm tọa độ A_1, A_2 như sau:
Gọi H là hình chiếu của A trên d_1. Khi đó

$$\left.\begin{array}{r} A(-3;5) \in AH \\ \vec{n}_{AH} = \vec{u}_{d1} = (-1;1) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{PT của } AH: -x+y-8=0.$$

Tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ -x+y-8=0 \end{cases} \Rightarrow H(5;-3)$$

Mặt khác H là trung điểm của AA_1 nên $A_1(13;-11)$
Tương tự ta cũng tìm được $A_2\left(-\frac{3}{5};-\frac{11}{5}\right)$.
Như vậy, theo tính chất đường phân giác trong của tam giác suy ra A_1, A_2 thuộc đường thẳng BC, nên phương trình đường thẳng BC cũng chính là phương trình của A_1A_2.
Kết luận: $\boxed{BC: 11x+17y+220=0}$. □

Nhận xét: Qua các bài toán trên, chúng ta thấy rằng khi bài toán cho phương trình đường phân giác thường thì ta sẽ nghĩ tới hướng làm như thế nào? Thật may mắn, đường phân giác nó có một tính chất cơ bản đó là mỗi điểm nằm trên nó luôn cách đều hai cạnh kề, hay nói cách khác đó là tính đối xứng của các cặp điểm trên hai cạnh kề qua đường phân giác. Cụ thể, nếu Δ là đường phân giác của góc xOy thì với mỗi điểm $M \in Ox$ có điểm đối xứng của nó thuộc tia Oy.

Bài 50. *Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1;3)$ và cắt trục Ox, Oy lần lượt tại M, N sao cho $\frac{2}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$ nhỏ nhất.*

Giải:

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng: $y = kx + b, \quad k \neq 0$
Do d đi qua $A(-1;3)$ nên ta có $-k+b=3 \Rightarrow k = b-3$.
(d) cắt Ox tại $M \Rightarrow M\left(-\frac{b}{k};0\right)$

(d) cắt Oy tại $N \Rightarrow N(0;b)$

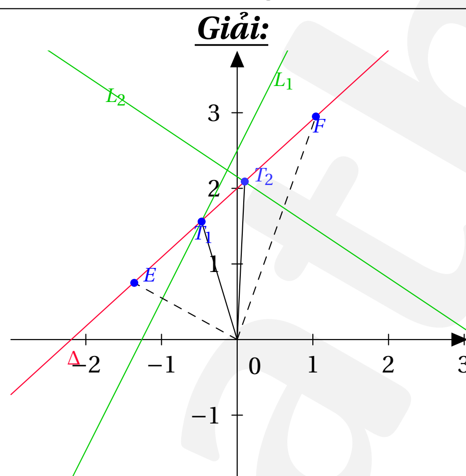
Khi đó
$$\frac{2}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{2k^2}{b^2}+\frac{1}{b^2}$$
$$=\frac{2(b-3)^2+1}{b^2}=\left(\frac{\sqrt{19}}{b}-\frac{6}{\sqrt{19}}\right)^2+\frac{2}{19}\geq\frac{2}{19}$$

Do đó $\left(\frac{2}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}\right)_{min}=\frac{2}{19}$ khi $b=\frac{19}{6}\Rightarrow k=-\frac{1}{6}$.

Tóm lại, $\boxed{(d): y=-\frac{x}{6}+\frac{19}{6}}$. □

Bài 51. *(Trích đề thi thử THPT Quốc gọc Huế-2012).*
Trong mặt phẳng Oxy cho 2 đường thẳng: $(L_1): 4x-2y+5=0,\quad (L_2): 4x+6y-13=0$
Đường thẳng Δ cắt $(L_1),(L_2)$ lần lượt tại T_1,T_2. Biết rằng (L_1) là phân giác góc tạo bởi OT_1 và Δ, (L_2) là phân giác góc tạo bởi OT_2 và Δ. Tìm tọa độ giao điểm của Δ và trục tung?

Giải:



Gọi E và F là điểm đối xứng của O qua (L_1) và (L_2) , I,J theo thứ tự là trung điểm của OE,OF

Ta dễ dàng chứng minh được E,F thuộc Δ

Gọi $I(a;b)\Rightarrow E(2a;2b)$

I thuộc (L_1) và $OI\perp(L_1)$, suy ra $I(-1;\frac{1}{2})\Rightarrow E(-2;1)$

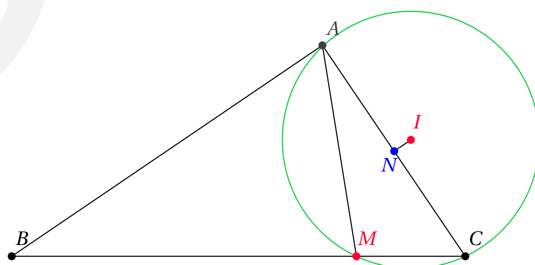
Tương tự ta cũng tìm được $J(1;\frac{3}{2})\Rightarrow F(2;3)$

Phương trình Δ đi qua E và F : $\Delta: x-2y+4=0$

Kết luận, giao điểm của Δ với trục tung là $\boxed{M(0;2)}$. □

Bài 52. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông tại A và điểm $B(1,1)$. Phương trình đường thẳng $AC: 4x+3y-32=0$. Tia BC lấy M sao cho $BM.BC=75$. Tìm C biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC là $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.*

Giải:



•<u>Cách 1:</u>

I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC.

Ta có: $P_{(B/(I))} = \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = BI^2 - R^2$ với $R = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

Vì B nằm ngoài đường tròn (I) nên ta có: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = BM.BC = 75 \Leftrightarrow BI^2 - R^2 = 75 \Rightarrow BI^2 = \dfrac{425}{4}$

Viết được phương trình $AB: 3x - 4y + 1 = 0$ và tìm được $A(5;4)$

Gọi $I(x;y)$ ta có: $\begin{cases} IA^2 = \dfrac{125}{4} \\ IB^2 = \dfrac{425}{4} \end{cases}$

Tính được: $I\left(\dfrac{13}{2};2\right)$ hoặc $I\left(\dfrac{7}{2};6\right)$

Viết phương trình đường trung trực IN của AC. Tìm được $N = AC \cap IN$.

Dùng tính chất trung điểm suy ra: $\boxed{C(8;0) \text{ hoặc } C(2;8)}$.

•<u>Cách 2(HD cách làm:)</u>

Vì $BA \perp AC$ nên tìm được tọa độ điểm A.

Kẻ $MK \perp BC$ cắt AB tại K.

Khi đó gọi I là trung điểm của CK ta dễ dàng suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC

Do $\Delta BMK \backsim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BK}{BC}$. Từ đó tính được BK.

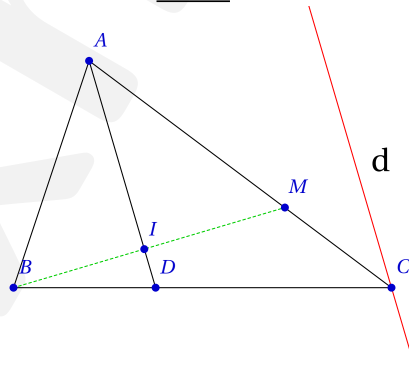
Do A nằm giữa B và K nên ta sẽ có: $AK = BK - BA$

Từ đó ta tính được độ dài cạnh $AC = \sqrt{4R^2 - AK^2}$

Và suy ra tọa độ điểm C. □

Bài 53. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có: $A(0;2); B(2;6)$ và C thuộc đường thẳng $(d): x - 3y + 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C sao cho phân giác trong xuất phát từ đỉnh A song song với đường thẳng d.*

<u>Giải:</u>



Vì đường phân giác trong góc A song song với đường thẳng d nên phương trình đường phân giác có dạng $x - 3y + m = 0$.

Vì qua $A(0;2)$ nên phân giác trong góc A có phương trình $d_1: x - 3y + 6 = 0$.

Gọi M là điểm đối xứng với B qua đường phân giác d_1, khi đó ta có: $M \in AC$.

Ta viết được phương trình đường thẳng BM là: $3x + y - 12 = 0$.

Từ đó, giao điểm I của d_1 và BM có tọa độ là: $I(3;3)$. Suy ra tọa độ điểm $M(4;0)$.

Từ đó suy ra phương trình đường thẳng AC là: $x + 2y = 4$.

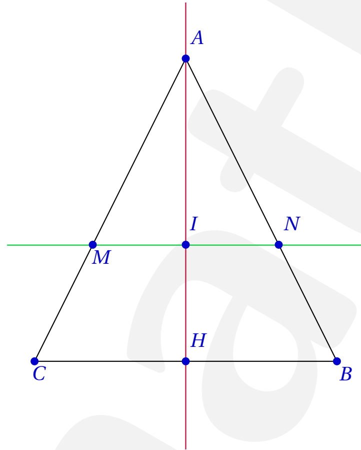
Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ x-3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Kết luận: $\boxed{C(2;1)}$. $\square$

Bài 54. *Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC cân tại A. Biết phương trình các đường thẳng $AB;BC$ có phương trình lần lượt là $x+2y-1=0; 3x-y+5=0$. Viết phương trình cạnh AC biết rằng $M(1;-3)$ thuộc cạnh AC.*

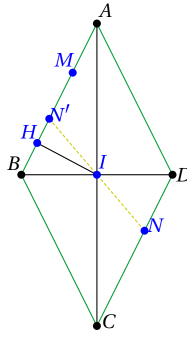
Giải:



Xét phương trình đường thẳng qua M song song với BC.
Phương trình đường thẳng này có dạng $(d): 3x-y-6=0$
Gọi N là giao điểm của (d) và AB. Tính được $N\left(\frac{13}{7}\ \frac{3}{7}\right)$
Trung điểm I của MN là: $I\left(\frac{10}{7};\frac{12}{7}\right)$.
Đường thẳng AI có dạng $(AI): x+3y-\frac{46}{7}=0$
Ta tính được $H\left(-\frac{59}{70};\frac{173}{70}\right)$ là giao điểm của AI và BC.
Hơn nữa, B là giao điểm của BC và AB, suy ra $B\left(-\frac{9}{7};\frac{8}{7}\right)$
Vì H là trung điểm của BC. Suy ra được tọa độ điểm $C\left(-\frac{2}{5};\frac{19}{5}\right)$
Như vậy đường thẳng AC đi qua 2 điểm C và M có phương trình tổng quát là
$\boxed{34x+7y-13=0}$ $\square$

Bài 55. *Trong mặt phẳng Oxy cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(2;1)$ và $AC=2BD$. Điểm $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB; điểm $N(0;7)$ thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.*

Giải:



Ở bài toán này trước tiên chúng ta hãy để ý tới vị trí của ba điểm M, I, N trên hình thoi $ABCD$ ta thấy ngay được nếu ta gọi N' là điểm đối xứng của N qua tâm I thì ta có N' thuộc cạnh AB. Vậy phương trình AB hoàn toàn xác định được.
Cụ thể ta có tọa độ điểm $N'(x'; y')$ được xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} x' = 2x_I - x_N = 4 \\ y' = 2y_I - y_N = -5 \end{cases} \Rightarrow N'(4; -5)$$

Lúc đó ta có đường thẳng AB là đường thẳng đi qua hai điểm $M; N'$ nên:
$\begin{cases} N' \in AB \\ \overrightarrow{u}_{AB} = \left(4; -\dfrac{16}{3}\right) \end{cases}$ nên phương trình $AB: \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{3(x+5)}{16} \Leftrightarrow 4x + 3y - 1 = 0$
Bây giờ ta quan sát đến dữ kiện giả thiết $AC = 2BD$. Điều quan tâm của chúng ta là qua dữ kiện này bài toán muốn cho biết điều gì?
Ta để ý rằng $BD = 2BI; AC = 2AI$. Vậy từ điều kiện $AC = 2BD$ ta có ngay được $AI = 2BI$.
Chú ý vào tam giác ABI vuông tại I ta không có dữ kiện cạnh cụ thể nào cả nên ta đặt $BI = x$ thì ta có $AI = 2x$.
Độ dài đường cao trong tam giác ABI vuông tại I chính là khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng AB nên ta có:

$$IH = d_{(I,AB)} = \frac{|4.2 + 3.1 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^5}} = 2 \text{ với } IH \perp AB$$

Xét trong ABI vuông tại I ta có :

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{BI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \text{ hay } BI = \sqrt{5} \quad (1)$$

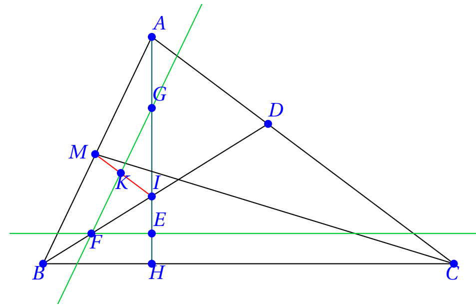
Ở (1) cho chúng ta liên tưởng điểm B thuộc đường tròn tâm I và bán kính bằng $\sqrt{5}$. Do đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow B(1; -1) \text{ (vì B có hoành độ dương)}$$

Kết luận: $\boxed{B(1; -1)}$ □

Bài 56. (*) *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có phương trình các đường cao AH, phân giác trong BD, trung tuyến CM lần lượt là $2x + y - 12 = 0, y = x - 2, x - 5y - 3 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C.*

Giải:

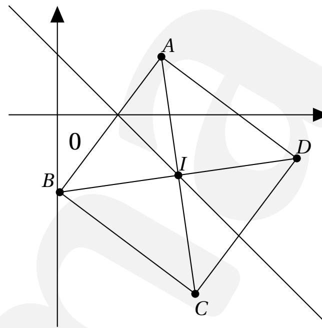


Hướng dẫn giải:

•Trên AH lấy 1 điểm E bất kì và tại E dựng đường thẳng $d \perp AH$.
•Dựng đường thẳng d' đối xứng với d qua phân giác BD. Đường thẳng này cắt BD tại F, cắt AH tại G.
•Gọi K là trung điểm của FG. Ta cần chứng minh $IK \cap CM = M$ (Với I là giao điểm của AH và BD).
•Từ đó ta dễ dàng tìm được tọa độ A, B, C. □

Bài 57. *Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông có $AB: 4x-3y-4=0, CD: 4x-3y-18=0$ và tâm I thuộc $d: x+y-1=0$, viết phương trình đường thẳng chứa hai canh còn lại của hình vuông đó*

Giải:



$I \in d: x+y-1=0$ nên $I=(x_0; 1-x_0)$. Vì I là tâm hình vuông nên

$$d(I,AB)=d(I,CD) \Leftrightarrow \frac{4x_0-3(1-x_0)-4}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \frac{|4x_0-3(1-x_0)-18|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \Leftrightarrow |7x_0-7|=|7x_0-21|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x_0-7=7x_0=7x_0-21 \text{ Vô lí} \\ 7x_0-7=21-7x_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_0=2$$

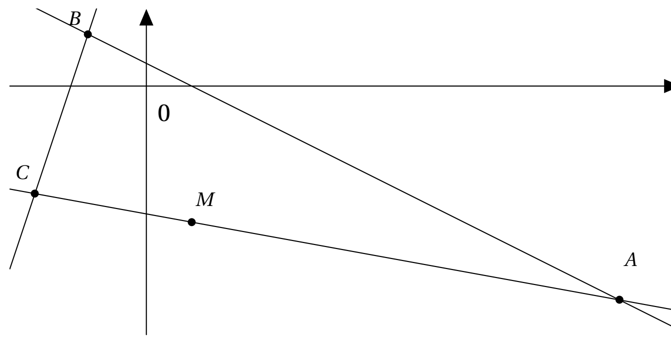
Nên điểm $I(2;-1)$. Phương trình cạnh $BC: 3x+4y+c=0$

Có $d(I,AB)=d(I,BC) \Leftrightarrow \dfrac{|4.2-3.(-1)-4|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \dfrac{|3.2+4(-1)+c|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Leftrightarrow 7=|2+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=5 \\ c=-9 \end{array}\right.$

Kết luận: Vậy phương trình các cạnh $\begin{cases} BC: 3x+4y+5=0 \\ AD: 3x+4y-9=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} BC: 3x+4y-9=0 \\ AD: 3x-4y+5=0 \end{cases}$ □

Bài 58. *Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC cân đỉnh A. Canh bên AB và canh đáy BC có phương trình lần lượt là $x+2y-1=0$ và $3x-y+5=0$. Lập phương trình cạnh AC biết đường thẳng AC đi qua điểm $M(1;-3)$.*

Giải:



Gọi $\overrightarrow{n} = (a;b)$với $a^2+b^2 \neq 0$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AC,
Khi đó phương trình cạnh AC đi qua $M(1;-3)$ có dạng $AC: a(x-1)+b(y+3)=0$
Từ phương trình cạnh AB suy ra đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{n_1}(1;2)$ làm một vectơ pháp tuyến.
Từ phương trình cạnh BC suy ra đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{n_2}(3;-1)$ làm một vectơ pháp tuyến.
Vì tam giác ABC cân tại A nên ta có:

$$|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})| = |\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{n_2})|$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2 = 5(3a-b)^2$$
$$\Leftrightarrow 44a^2-30ab+4b^2 = 0(1)$$

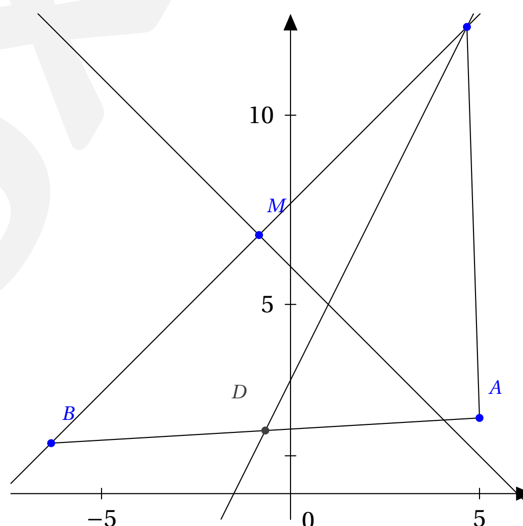
+ Nếu $b=0$ thay vào (1) $\Rightarrow a=0$ (Loại)

+ Nếu $b \neq 0$ chọn $b=1$ thay vào (1) ta có $44a^2-30a+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{2}{11} \end{array}\right.$

* Với $a=\dfrac{1}{2}$ thì phương trình cạnh $AC: x+2y+5=0$(Loại vì khi đó ACsong song với AB)
* Với $a=\dfrac{2}{11}$ thì phương trình cạnh $AC: 2x+11y+31=0$
Kết luận: Phương trình cạnh $AC: 2x+11y+31=0$ □

Bài 59. *Trong mặt phẳng Oxy, tìm tọa độ các dỉnh còn lại của tam giác ABC biết $A(5;2)$, phương trình đường trung trực của BC, đường trung tuyến CD lần lượt có phương trình là : $x+y-6=0$ và $2x-y+3=0$.*

Giải:



Gọi $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC , M là trung điểm của BC.
nên M thuộc đường trung trực của BC suy ra $M(a;6-a)$
Ta có $\overrightarrow{AG}=(x_G-5;y_G-2)$, $\overrightarrow{AM}=(a-5;4-a)$
Theo tính chất trọng tâm ta có

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G-5=\frac{2}{3}(a-5)\\ y_G-2=\frac{2}{3}(4-a)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\frac{2a}{3}-\frac{5}{3}\\ y_G=\frac{-2a}{3}+\frac{14}{3}\end{cases}$$

Mà G thuộc trung tuyến CD nên

$$2\left(\frac{2a}{3}-\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{-2a}{3}+\frac{14}{3}\right)+3=0\Leftrightarrow a=-\frac{-5}{6}$$

suy ra $M\left(\frac{-5}{6};\frac{41}{6}\right)$

Phương trình đường thẳng $BC:1\left(x-\frac{5}{6}\right)-\left(y-\frac{41}{6}\right)=0\Leftrightarrow x-y+\frac{23}{3}=0$

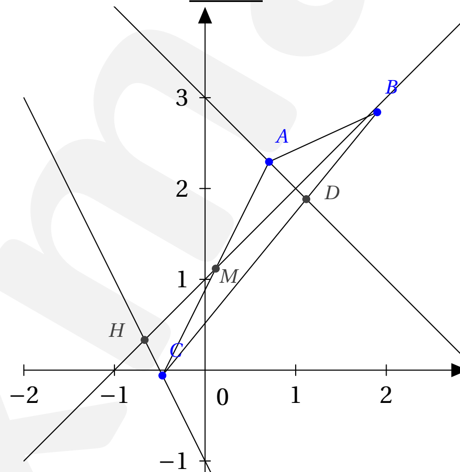
Nên tọa độ điểm Clà nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y+\frac{23}{3}=0\\ 2x-y+3=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{14}{3}\\ y=\frac{37}{3}\end{cases}$ hay $C\left(\frac{14}{3};\frac{37}{3}\right)$

Mà M là trung điểm của BC nên $B\left(\frac{-19}{3};\frac{4}{3}\right)$

Kết luận: $B\left(\frac{-19}{3};\frac{4}{3}\right)$, $C\left(\frac{14}{3};\frac{37}{3}\right)$ □

Bài 60. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường phân giác từ A , trung tuyến từ B, đường cao từ C có phương trình lần lượt là: $x+y-3=0, x-y+1=0, 2x+y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.*

Giải:



Gọi đường phân giác $AD:x+y-3=0$, đường trung tuyến $BM:x-y+1=0$
và đường cao $CH:2x+y+1=0$
Mà $A\in AD\Rightarrow A(a;3-a); B\in BM\Rightarrow B(b;b+1); C\in CH\Rightarrow C(c;-2c-1)$
Có M là trung điểm của AC nên $M\left(\frac{a+c}{2};\frac{2-a-2c}{2}\right)$.

Mà $M\in BM$ nên thay vào phương trình BM, ta có: $\frac{a+c}{2}-\frac{2-a-2c}{2}+1=0\Leftrightarrow 2a+3c=0$ (1)

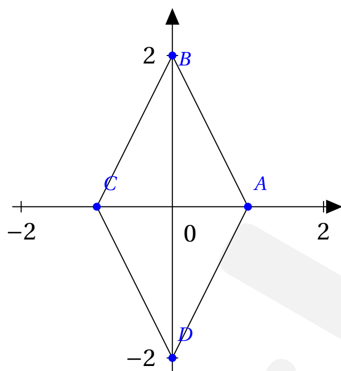
Ta có $\overrightarrow{AB}=(b-a;a+b-2)$. DO $AB\perp CH\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\vec{u}_{CH}=0\Leftrightarrow 3a+b=4$ (2)
Trong đó $\vec{u}_{CH}=(1;-2)$ là một vectơ chỉ phương của đường cao CH.
Gọi $I=BM\cap AD$ Nhận thấy $AD\perp BM=I$, nên I là trung điểm của BM.
Do đó $I=\left(\frac{a+2b+c}{4};\frac{-a+2b-2c+4}{4}\right)$ mà $I\in AD\Rightarrow 4b-c=8$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $a=\frac{12}{17}, b=\frac{32}{17}, c=\frac{-8}{17}$

Kết luận: $A\left(\frac{12}{17};\frac{39}{17}\right), B\left(\frac{32}{17};\frac{48}{17}\right), C\left(\frac{-8}{17},\frac{-1}{17}\right)$ □

Bài 61. *Trong mặt phẳng Oxy cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng 4. Biết $A(1;0), B(0;2)$ và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $y=x$. Tìm tọa độ đỉnh C và D.*

Giải:



Vì I thuộc đường thẳng $y=x$ nên $I=(a;a)$

Suy ra $C(2a-1;2a), D(2a;2a-2)$

Có $AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

Phương trình đường thẳng $AB: 2(x-1)+y=0$ hay $2x+y-2=0$

Theo bài ra thì diện tích hình binh hành $ABCD$ bằng 4.

Nên $S_{ABC}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.AB.d(C,AB)=2 \Leftrightarrow |3a-2|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\frac{4}{3}\end{array}\right.$

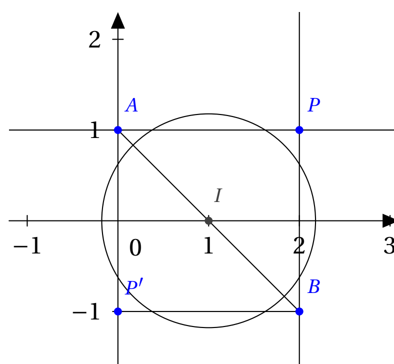
+ Với $a=0$ thì $C=(-1;0), D=(0;-2)$

+ Với $a=\frac{4}{3}$ thì $C\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$

Kết luận: $C=(-1;0), D=(0;-2)$ hoặc $C\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$ □

Bài 62. *Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(0;1), B(2;-1)$ và hai đường thẳng $d_1: (m-1)x+(m-2)y+2-m=0, d_2: (2-m)x+(m-1)y+3m-5=0$. Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau, Gọi P là giao điểm của d_1 và d_2, Tìm m sao cho $PA+PB$ lớn nhất.*

Giải:



Ta có

$\overrightarrow{n_1} = (m-1; m-2)$ là một vectơ pháp tuyến của d_1

$\overrightarrow{n_2} = (2-m; m-1)$ là một vectơ pháp tuyến của d_2

dễ thấy $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$ với mọi m hay $d_1 \perp d_2$ nên hiển nhiên d_1 cắt d_2 với mọi m

Kết hợp với $A \in d_1; B \in d_2$

$\Rightarrow P$ thuộc đường tròn đường kính AB $(x-1)^2 + y^2 = 2 (C)$.

Ta có $PA + PB \le \sqrt{2(PA^2 + PB^2)} = \sqrt{2AB^2} = 4$

đẳng thức xảy ra khi $PA = PB$

Hay tam giác ABC vuông cân tại P , tức P là điểm chính giữa của cung ABC

Gọi (d) là đường thẳng đi qua tâm $I(1;0)$ của đường tròn (C) và vuông góc với AB.

Ta có : $d : x - y - 1 = 0$

Vì $P = d \cap (C)$ Khi đó tọa độ của P là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = 1 \\ x = 0, y = -1 \end{array} \right.$$

Từ đó dễ dàng tính được $P(2;1)$ hoặc $P(0;-1)$

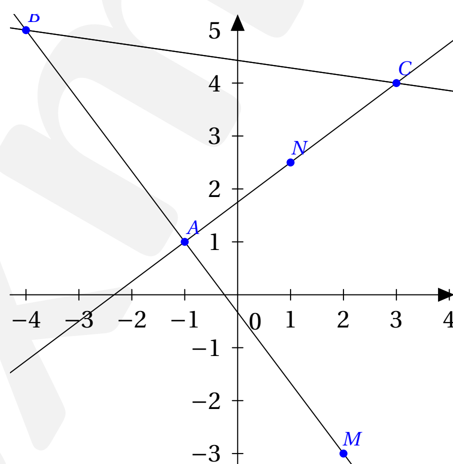
+ Với $P(0;-1)$ thay vào (d_1) ta thu được $m = 2$

+ Với $P(2;1)$ thay vào d_1 ta có $m = 1$

Kết luận: Vậy với $m = 1$ hoặc $m = 2$ thì $PA + PB$ lớn nhất. □

Bài 63. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A. Biết rằng cạnh huyền nằm trên đường thẳng $d : x + 7y - 31 = 0$. Điểm $N(1; \frac{5}{2})$ thuộc đường thẳng AC, điểm $M(2;-3)$ thuộc đường thẳng AB. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.*

Giải:



Gọi $\overrightarrow{n_{AC}} = (a; b), a^2 + b^2 \ne 0$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AC.

Nên vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\overrightarrow{n_{AB}} = (b; -a)$

Phương trình cạnh AB đi qua $M(2;-3)$ là:$bx - ay - 3a - 2b = 0$

Vì tam giác ABC cân tại A nên

$$|\cos(\overrightarrow{n}_{AC}, \overrightarrow{n}_{BC})| = |\cos(\overrightarrow{n}_{AB}, \overrightarrow{n}_{BC})| \Leftrightarrow |a + 7b| = |b - 7a| (*)$$

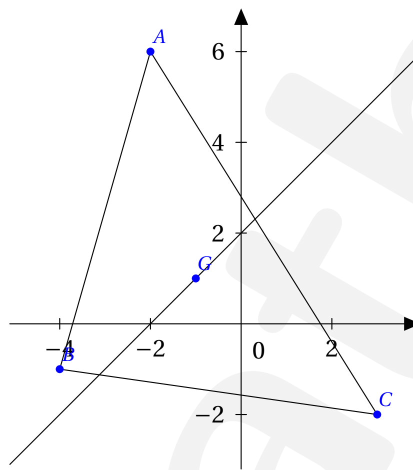
+ Nếu $a = 0$ thay vào (*) suy ra $b = 0$ (trường hợp này loại vì $a^2 + b^2 \ne 0$)

+ Nếu $a \ne 0$ chọn $a = 3$ thay vào (*) ta được $b = -4$ hay $b = \frac{9}{4}$

- Với a=3 và b=4 ta được phương trình $AC: 3x-4y+7=0$ và $AB: 4x+3y+1=0$
Nên tọa độ điểm $A(-1;1), B(-4;5), C(3;4)$
- Với $a=3$và $b=\frac{9}{4}$ ta thu được phương trình $AC: 3x+\frac{9}{4}y-\frac{69}{8}=0, AB: \frac{9}{4}x-3y-\frac{27}{2}=0$
Nên tọa độ $A(4;\frac{-3}{2}), B(10;3), C\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$
Kết luận: Vậy $A(-1;1), B(-4;5), C(3;4)$ hoặc $A\left(4;\frac{-3}{2}\right), B(10;3), C\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$ □

Bài 64. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết $B(-4;-1), C(3;-2)$, diện tich tam giác ABC bằng $\frac{51}{2}$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $d: x-y+2=0$. Hãy tìm tọa độ đỉnh A.*

Giải:



Ta có $BC=5\sqrt{2}$. Phương trình $BC: x+7y+11=0$. Mà G thuộc d nên $G(a;a+2)$
Theo bài ra

$$S=\frac{1}{2}.BC.d(A,BC)\Rightarrow d(A,BC)=\frac{51}{5\sqrt{2}}\Rightarrow d(G,BC)=\frac{51}{15\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{|a+7(a+2)+11|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{51}{15\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow |8a+25|=17 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8a+25=17 \\ 8a+25=-17 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\frac{-21}{4} \end{array}\right.$$

Với $a=-1$ thì $G(-1;1)$ nên tọa độ điểm $A(-2;6)$
Với $a=-\frac{21}{4}$ thì $G\left(\frac{-21}{4};\frac{-13}{4}\right)\Rightarrow A\left(-\frac{59}{4};-\frac{27}{4}\right)$
Kết luận: Vậy $A(-2;6)$ hoặc $A\left(-\frac{59}{4};-\frac{27}{4}\right)$ □

Bài 65. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $S=\frac{3}{2}$, hai đỉnh là $A(2;-3), B(3;-2)$ và trọng tâm G của tam giác thuộc đường thẳng $3x-y-8=0$. Tìm tọa độ đỉnh C*

Giải:

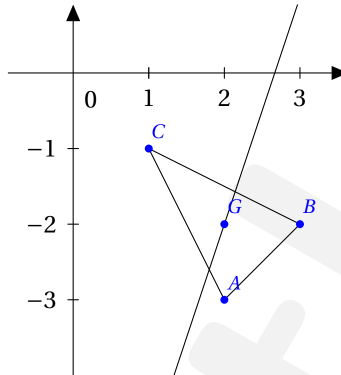
Gọi $C(x_0;y_0)$ là điểm cần tìm.
G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{5+x_0}{3};\frac{-5+y_0}{3}\right)$
Mà G thuộc đường thẳng : $3x-y-8=0$ nên

$$3.\frac{5+x_0}{3}-\frac{-5+y_0}{3}-8=0 \Leftrightarrow 3x_0-y_0-4=0 \qquad (1)$$

Phương trình cạnh AB:$x-y-5=0$
Diện tích tam giác ABC là :

$$S=\frac{1}{2}.AB.d(C,AB)\Leftrightarrow d(C,AB)=\frac{2S}{AB}\Leftrightarrow |x_0-y_0-5|=3$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_0-y_0-8=0 & (2)\\ x_0-y_0-2=0 & (3)\end{array}\right.$$

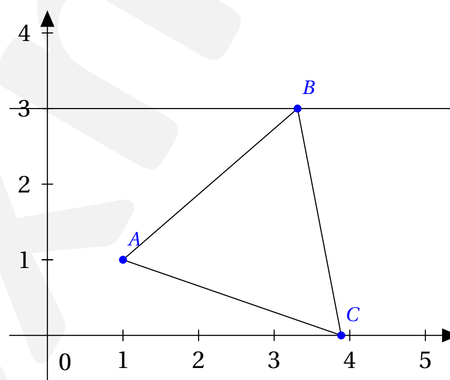
Từ (1) và (2) $\Leftrightarrow C(-2;-10)$
Từ (1) và (3) $\Leftrightarrow C(1;-1)$
Kết luận: Vậy $C(-2;-10)$ hoặc $C(1;-1)$ □



Bài 66. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$ và các đỉnh $A(3;-5)$, $B(4;-4)$. Biết rằng trọng tâm G của tam giác ABC thuộc đường thẳng $3x-y-3=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.*
bài này tương tự bài trên các bạn tự rèn luyện nhé. Đs: $C(13;18)$ hoặc $C(16;27)$

Bài 67. *Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(1;1)$ trên mặt phẳng tọa độ . hãy tìm điểm B trên đường thẳng $y=3$ và điểm C trên trục hoành sao cho tam giác ABC là tam giac đều.*

Giải:



Gọi $B(b;3)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y=3$ và $C(c;0)\in Ox$ là những điểm cần tìm.
Tam giác ABC đều nên

$$\begin{cases} AB=BC\\ BC=AC\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(b-1)^2+4}=\sqrt{(c-b)^2+9}\\ \sqrt{(c-b)^2+9}=\sqrt{(c-1)^2+1}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(b-1)^2=(c-b)^2+5\\ (c-b)^2=(c-1)^2-8\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(b-1)^2=(c-b)^2+5(1)\\ 2(b-1)c=b^2+7(2)\end{cases}$$

Từ (2) ta thấy $b \neq 1$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow c = \dfrac{b^2+7}{2(b-1)} \Rightarrow c - b = \dfrac{8-(b-1)^2}{2(b-1)}$

Thay $c - b = \dfrac{8-(b-1)^2}{2(b-1)}$ vào (1) ta có

$$\begin{aligned}(b-1)^2 &= \left[\frac{8-(b-1)^2}{2(b-1)}\right]^2 + 5\\ &\Leftrightarrow 3(b-1)^4 - 4(b-1)^2 - 64 = 0\\ &\Leftrightarrow (b-1)^2 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{3+4\sqrt{3}}{3}\\ b = \dfrac{3-4\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.\end{aligned}$$

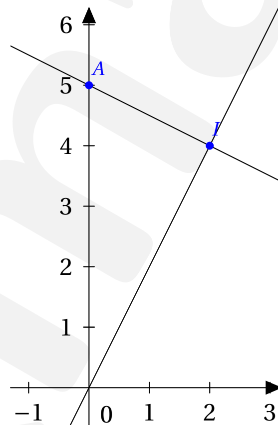
-Với $b = \dfrac{3+4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow C = \dfrac{5\sqrt{3}+3}{3}$

-Với $b = \dfrac{3-4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow C = \dfrac{-5\sqrt{3}-3}{3}$

Kết luận: Vậy $B\left(\dfrac{3+4\sqrt{3}}{3};3\right), C = \left(\dfrac{5\sqrt{3}-3}{3};0\right)$ hoặc $B\left(\dfrac{3-4\sqrt{3}}{3};3\right), C = \left(\dfrac{3-5\sqrt{3}}{3};0\right)$ □

Bài 68. *Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông có đỉnh $A(0;5)$ và một đường chéo nằm trên đường thẳng có phương trình $y - 2x = 0$. Tìm tọa độ hình vuông đó*

Giải:



Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$ đã cho thì I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Dễ thấy phương trình đường chéo $BD : y - 2x = 0$

Ta có $AC \perp BD$ tại I

Nên phương trình đường chéo AC có dạng : $x + 2y + c = 0$

Mà AC đi qua điểm $A(0;5)$ do đó phương trình $AC : x + 2y - 10 = 0$

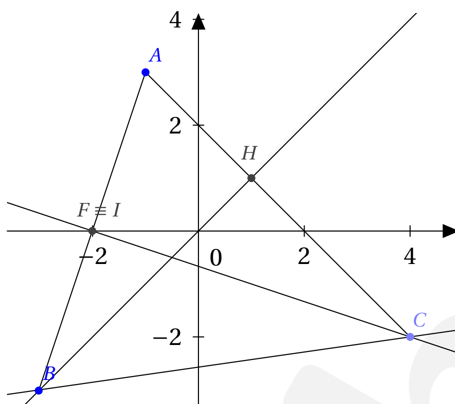
Tọa độ tâm hình vuông là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 10 = 0\\ y - 2x = 0\end{cases} \Leftrightarrow I(2;4)$$

Kết luận: Vậy $I(2;4)$ □

Bài 69. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A(-1;3)$, đường cao BH nằm trên đường thẳng $y = x$, phân giác trong của góc C nằm trên đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.*

Giải:



Ta có $AC \perp BH$ nên phương trình AC có dạng : x+y+c=0(1)
AC đi qua $A(-1;3)$ nên thay vào (1) ta có: $c = -2$
Do đó phương trình cạnh AC là : $x + y - 2 = 0$

Tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(4;-2)$

Dựng AI vuông góc với đương phân giác $CF : x + 3y + 2 = 0$ tại điểm I
Suy ra, phương trình AI có dạng: $3x - y + d = 0$
Mà $A \in AI$ nên : $3.(-1) - 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$
Do vậy phương trình của $AI : 3x - y + 6 = 0$
Tọa độ của I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y + 6 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(-2;0)$$

Gọi A' là điểm đối xưng với A qua phân giác CF , suy ra I là trung điểm của AA'
Ta có:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A = -3 \\ y_{A'} = 2y_I - y_A = -3 \end{cases} \Leftrightarrow A'(-3;-3)$$

mà $A' \in BC$
Do đó phương trinh canh BC là : $x - 7y - 18 = 0$
Kết luận:Vậy phương trinh canh BC là : $x - 7y - 18 = 0$ □

Bài 70. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC cân ở A. Điểm $M(1;-1)$ là trung điểm của BC, trọng tâm $G\left(\frac{2}{3};0\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.*

Giải:

Ta có $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = 3(x_G - x_M) \\ y_A - y_M = 3(y_G - y_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0;2)$

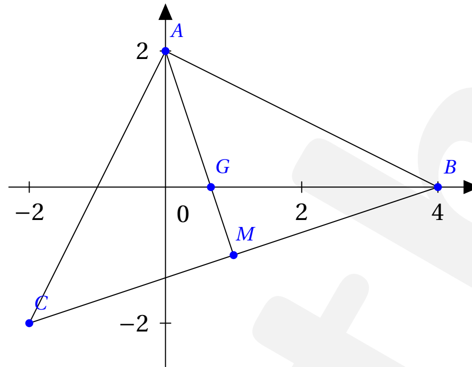
Vì tam giác ABC vuông cân ở A nên BC nhận $\overrightarrow{AM} = (1;-3)$ làm một vectơ pháp tuyến.
Vậy phương trình BC là: $x - 3y - 4 = 0$

Mặt khác $MB = MA = MC = \sqrt{10}$
Nên A, B, C thuộc đường tròn tâm M bán kinh $R = \sqrt{10}$ có phương trình $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$
Do đó tọa độ các điểm B, C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ (3y+3)^2 + (y+1)^2 = 10 \end{cases}$$

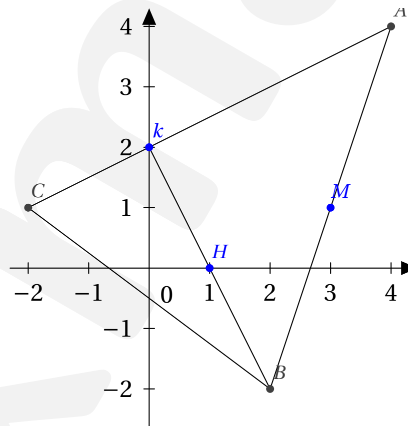
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = -4 \\ y = -2 \Rightarrow x = -2 \end{array} \right.$$

Kết luận: Vậy $B(4;0), C(-2;-2)$ □



Bài 71. *Trong mặt phẳng Oxy hãy viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết trực tâm $H(1;0)$, chân đường cao hạ từ đỉnh B là $K(0;2)$, trung điểm cạnh AB là $M(3;1)$.*

Giải:



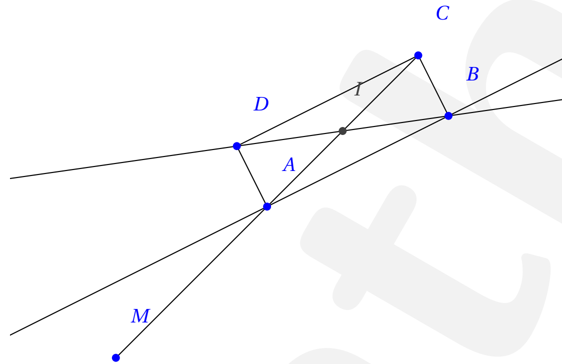
Đường thẳng AC vuông góc với HK nên nhận $\overrightarrow{HK} = (-1;2)$ làm một vectơ pháp tuyến và AC đi qua K nên phương trình đường thẳng $AC : x - 2y + 4 = 0$
Ta cũng phương trình đường thẳng BK đi qua K và nhận $\overrightarrow{HK} = (-1;2)$ làm vectơ chỉ phương nên $BK : 2x + y - 2 = 0$
Do $A \in AC \Rightarrow A(2a-4;a)$
$B \in BK \Rightarrow B(b;2-2b)$
Mặt khác $M(3;1)$ là trung điểm của AB, nên

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 4 + b = 6 \\ a + 2 - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 10 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Do đó $A(4;4), B(2;-2)$
Từ đó ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-6)$ nên phương trình canh $AB: 3x - y - 8 = 0$
Đường thẳng BC qua B vuông góc với AH nên nhận $\overrightarrow{HA} = (3;4)$ là pháp vectơ suy ra phương trinh : $BC: 3x + 4y + 2 = 0$
Kết luận: $AB: 3x - y - 8 = 0$, $BC: 3x + 4y + 2 = 0$, $AC: x - 2y + 4 = 0$ □

Bài 72. *Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình đường thẳng $AB: x - 2y + 1 = 0$, phương trình đường thẳng $BD: x - 7y + 14 = 0$, đường thẳng AC đi qua $M(2;1)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.*

Giải:



Tọa độ của B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - 7y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{21}{5} \\ y = \dfrac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{21}{5}; \dfrac{13}{5}\right)$

Mặt khác, $ABCD$ là hình chữ nhật nên góc giữa AC và AB bằng góc giữa AB và BD.
Gọi $\overrightarrow{n_{AB}}(1;-2)$; $\overrightarrow{n_{BD}}(1;-7)$; $\overrightarrow{n_{AC}}(a;b)$ với $a^2 + b^2 > 0$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của các đường thẳng AB, BD, AC.
Khi đó: $\left|\cos\left(\overrightarrow{n_{AB}}, \overrightarrow{n_{BD}}\right)\right| = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_{AC}}, \overrightarrow{n_{AB}}\right)\right|$

$$\Leftrightarrow |a - 2b| = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 7a^2 + 8ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = -\dfrac{b}{7} \end{array}\right.$$

+ Với $a = -b$ cho $a = 1$ thì $b = -1$ khi đó phương trình cạnh $AC: x - y - 1 = 0$ mà $A = AB \cap AC$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(3;2)$$

Gọi I là giao điểm hai đường chéo nên tọa độ của I là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 7y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

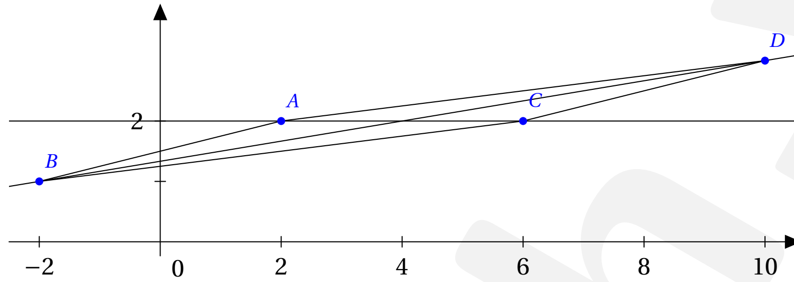
mà I là trung điểm của AC và BD nên $C(4;3), D\left(\dfrac{14}{5}; \dfrac{12}{5}\right)$
+ Với $b = -7a$ cho $a = 1 \Rightarrow b = -7$ khi đó phương trình cạnh $AC: x - 7y + 5 = 0$, dễ thấy $AC \parallel BD$ nên

trường hợp này loại.

Kết luận: Vậy $A(3;2), B\left(\frac{21}{5};\frac{13}{5}\right), C(4;3), D\left(\frac{14}{5};\frac{12}{5}\right)$ □

Bài 73. *Trong mặt phẳng Oxy cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng 4, các đỉnh $A(2;2), B(-2;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C và D biết rằng giao điểm của AC và BD thuộc đường thẳng $x-3y+2=0$*

Giải:



Có $AB=\sqrt{17}$ gọi $I=AC\cap BD$,

Ta có $S_{IAB}=\frac{1}{4}.S_{ABCD}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.d(I;AB)=1 \Leftrightarrow d(I;AB)=\frac{2}{\sqrt{17}}$

Phương trình đường thẳng $AB: x-4y+6=0$

Mà I thuộc đường thẳng: $x-3y+2=0 \Rightarrow I(3t-2;t)$

Từ đó :

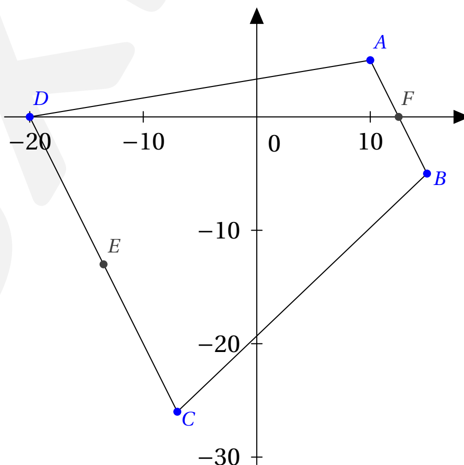
$$d(I;AB)=\frac{2}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \frac{|3t-2-4t+6|}{\sqrt{17}}=\frac{2}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow |4-t|=2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \Rightarrow I(4;2) \Rightarrow C(6;2),\ D(10;3) \\ t=6 \Rightarrow I(16;6) \Rightarrow C(30;10),\ D(34;11) \end{array}\right.$$

Kết luận: $C(6;2),\ D(10;3)$ hoặc $C(30;10),\ D(34;11)$ □

Bài 74. *Trong mặt phẳng Oxy cho $A(10;5), B(15;-5), D(-20;0)$ là các đỉnh của hình thang cân $ABCD$ trong đó AB song song với CD. Tìm tọa độ điểm C.*

Giải:



Ta có $CD \parallel AB$ suy ra, đường thẳng CD qua $D(-20;0)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(5;-10)$.

Phương trình của CD là : $2x+y+40=0$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta có $I\left(\frac{25}{2};0\right)$ và $IJ \perp CD$

Phương trình đường thẳng $IJ: 2x-4y-25=0$

Mà $J = IJ \cap CD$ nên tọa độ của J là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x+y+40=0 \\ 2x-4y-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-27}{2} \\ y=-13 \end{cases} \Rightarrow J\left(\frac{-27}{2};-13\right)$$

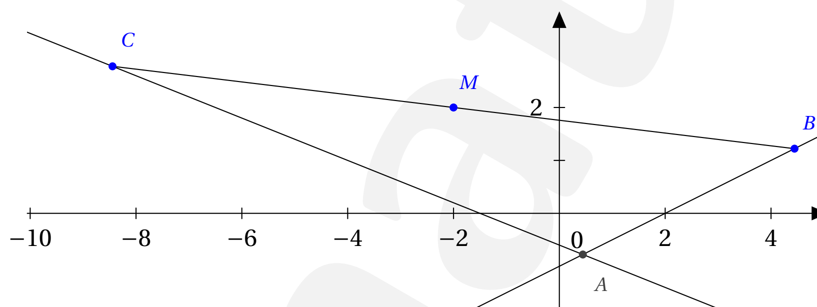
Theo tính chất hình thang cân thì J là trung điểm của CD nên theo công thức trung điểm

$$\begin{cases} x_C+y_D=2x_J \\ y_C+y_D=2y_J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C=-7 \\ y_C=-26 \end{cases}$$

Kết luận: Vậy điểm $C(-7;-26)$ là điểm cần tìm □

Bài 75. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M(-2;2)$ là trung điểm của cạnh BC. Cạnh AB có phương trình là $x-2y-2=0$, cạnh AC có phương trình là :$2x+5y+3=0$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác đó.*

Giải:



Tọa độ của A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x-2y-2=0 \\ 2x+5y+3=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{4}{9};-\frac{7}{9}\right)$$

Vì $B \in AB \Rightarrow B(2b+2;b), C \in AC \Rightarrow C\left(c;\frac{-2c-3}{5}\right)$

Mà M là trung điểm của BC nên theo công thức trung điểm ta có

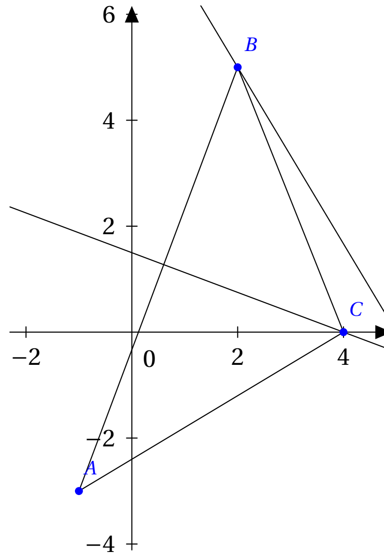
$$\begin{cases} 2b+2+c=4 \\ b+\dfrac{-2c-3}{5}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{11}{9} \\ c=\dfrac{-76}{9} \end{cases}$$

suy ra $B\left(\frac{40}{9};\frac{11}{9}\right), C\left(\frac{-76}{9};\frac{25}{9}\right)$

Kết luận: Vậy $A\left(\frac{4}{9};-\frac{7}{9}\right), B\left(\frac{40}{9};\frac{11}{9}\right), C\left(\frac{-76}{9};\frac{25}{9}\right)$ □

Bài 76. *Trong mặt phẳng Oxy cho đỉnh $A(-1;-3)$ biết hai đường cao $BH: 5x+3y-25=0, CK: 3x+8y-12=0$ Hãy xác định tọa độ các đỉnh B và C.*

Giải:



Ta có $AB \perp CK$

$\Rightarrow$ Phương trình cạnh AB có dạng: $8x - 3y + c = 0$

Vì AB đi qua $A(-1;-3)$ nên $-8+9+c=0 \Leftrightarrow c=-1$

Do đó phương trình $AB: 8x-3y-1=0$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8x-3y-1=0 \\ 5x+3y-25=0 \end{cases} \Rightarrow B(2;5)$$

Ta có $AC \perp BH$ nên phương trình của $AC: 3x-5y+m=0$

Mà AC đi qua $A(-1;-3) \Rightarrow m=-12$

do đó phương trình $AC: 3x-5y-12=0 \Rightarrow C(4;0)$

Kết luận: $B(2;5), C(4;0)$ □

Bài 77. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho hai đường thẳng* $d_1: x+2y-3=0,\ d_2: 3x+y-4=0$ *cắt nhau tại* $M(1,1)$. *Lập phương trình đường thẳng* d_3 *đi qua điểm :* $A(-2,-1)$ *cắt* d_1, d_2 *tại các điểm* P, Q *sao cho :* $MP=\sqrt{2}MQ$.

Giải:

Trước tiên ta xét điểm $T(3;0) \in d_1$ với $T \neq M$.

Xét điểm $N(x_1; 4-3x_1) \in d_2$với $N \neq M$.

Trong đó T, N phải thỏa điều kiện $MT=\sqrt{2}MN$.

Từ điều kiện này ta có được

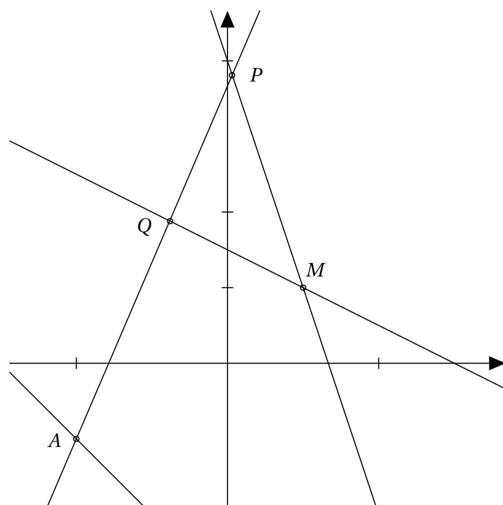
$$MT^2 = 2MN^2 \Leftrightarrow 5 = 2(10x_1^2 - 20x_1 + 10) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{5}{2} \\ x_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow y_1 = -\frac{7}{2} \end{array}\right.$$

Mặt khác ta có

$$\begin{cases} MT=\sqrt{2}MN \\ MP=\sqrt{2}MQ \end{cases} \Rightarrow \frac{MT}{MP} = \frac{MN}{MQ} \Rightarrow TN \parallel PQ \text{ (ĐL Talet.)}$$

Do đó d_3 đi qua A và song song với TN.

Vậy ta tìm được 2 đường thẳng (d_3) là $\boxed{x+y+3=0 \text{ hoặc } -7x+3y-11=0}$ □



Bài 78. *Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $\Delta_1: 2x-3y+4=0, \Delta_2: 3x+2y+5=0$ và điểm $M(1;1)$. Lập phương trình đường thẳng đi qua M và cùng với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 tạo thành một tam giác cân.*

Nhận xét: Để xét một tam giác cân thì ta phải lần lượt xét 3 trường hợp cần tại 3 đỉnh. Nhưng nếu như thế thì bài toán sẽ có thể dài và mất thời gian. Vì thế ta hãy đọc kĩ đề bài xem có gì đặc biệt.

Giải:

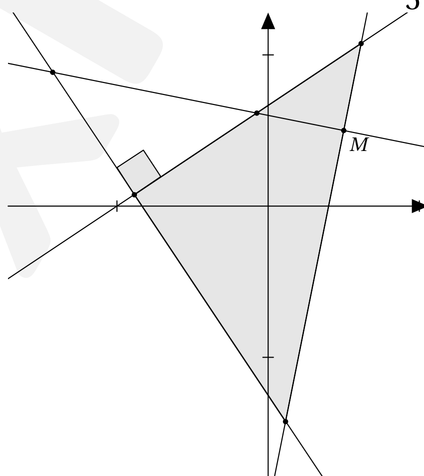
Ta nhận thấy $\Delta_1 \perp \Delta_2$, do đó nếu gọi đường thẳng cần lập phương trình là Δ, A là giao điểm của đường thẳng Δ_1 và Δ_2, B, C lần lượt là giao điểm của đường thẳng Δ với Δ_1, Δ_2 thì tam giác ABC vuông cân tại A. Nói cách khác, đường thẳng Δ là đường thẳng qua $M(1;1)$ và tạo với Δ_1 một góc $\dfrac{\pi}{4}$.

$$\Delta: \; y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Giải sử k là hệ số góc của Δ. Khi đó

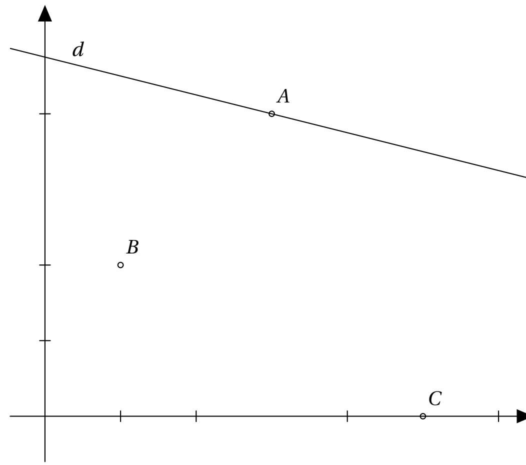
$$\left|\frac{k-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}k}\right| = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left|\frac{3k-2}{3+2k}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 5 \\ k_2 = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường thẳng qua cần tìm là: $\Delta: y = 5x-4$; $\Delta': y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{6}{5}$. □



Bài 79. *Trong mặt phẳng Oxy cho 3 điểm $A(3;4)$, $B(1;2)$,$C(5;0)$ .viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(3;4)$ sao cho : $d = 2d(B;d) + d(C;d)$ đạt giá trị lớn nhất.*

Giải:



Gọi phương trình đường thẳng qua A cần tìm là : $a(x-3)+b(y-4)=0 \quad (a^2+b^2\neq 0) \quad (\Delta)$

Ta có: $d(B;\Delta)=\dfrac{|-2a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad d(C;\Delta)=\dfrac{|2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Do đó: $A=2d(B;\Delta)+d(C;\Delta)=\dfrac{|-4a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{|2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|-4a-4b|+|2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Xét TH_1: B và C cùng phía với $(\Delta)\Leftrightarrow(-4a-4b)(2a-4b)\geq 0(*)$

Ta có:$A=\dfrac{|-2a-8b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 2\sqrt{17}$ (1)

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{-2}=\dfrac{b}{-8}\Leftrightarrow\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{4}$. Chọn $(a=1;b=4)$ thỏa mãn $(*)$

Vậy phương trình đường thẳng: $x+4y-19=0$.

Xét TH_2: B và C khác phía với $(\Delta)\Leftrightarrow(-4a-4b)(2a-4b)\leq 0 \quad (**)$:

Ta có: $A=\dfrac{|-6a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=d_{(I;\Delta)}$ (với $I(2:4)$)

Ta thấy rằng đường thẳng (Δ) qua A và chạy từ C đến B (do B và C khác phía với (Δ)) do đó $d(I;\Delta)$ max $\Leftrightarrow(\Delta)$ qua A và vuông góc với Ox . Khi đó $(\Delta): x=3$. và $A=1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $A_{max}=2\sqrt{17}$.

Kết luận: Phương trình đường thẳng: $x+4y-19=0$. □

P/s: Cần nhớ $|a|+|b|=|a+b|\Leftrightarrow ab\geq 0$

Bài 80. *Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $I(2;4)$ và 2 đường thẳng $d_1: 2x-y-2=0, d_2: 2x+y-2=0$. Viết phương trình đường tròn tâm I , cắt d_1 tại 2 điểm A,B và cắt đường thẳng d_2 tại 2 điểm C,D thoả mãn $AB+CD=\dfrac{16}{\sqrt{5}}$*

Giải:

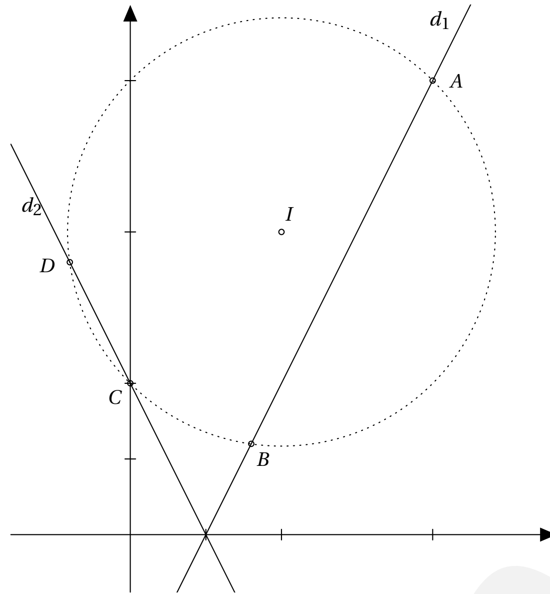
$$IH=d(I,d_1)=\frac{2}{\sqrt5}; IK=d(I,d_2)=\frac{6}{\sqrt5}; ID=IA=R;$$

$$KD+AH=\frac{8}{\sqrt5}\Leftrightarrow\sqrt{R^2-\frac45}+\sqrt{R^2-\frac{36}{5}}=\frac{8}{\sqrt5}$$

$$\Rightarrow\sqrt{5R^2-4}+\sqrt{5R^2-36}=8\Rightarrow 5R^2=40\Rightarrow R=2\sqrt2$$

$$\Rightarrow (C):(x-2)^2+(y-4)^2=8$$

Kết luận: Phương trình đường tròn (C):$(x-2)^2+(y-4)^2=8$ □



Bài 81. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(8;4), B(-7;-1), C(4;6)$. Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Xác định M thuộc đường tròn (C) sao cho $\overrightarrow{NA}\overrightarrow{NB}$ min*

Giải:

*Nhận xét:

Vì tọa độ A, B, C đã xác định nên AB, $\widehat{ACB}$ là các hằng số đã biết.

(+) Trước hết ta xét N khác A, B. Ta có $\overrightarrow{NA}\overrightarrow{NB} = NA.NB.\cos\widehat{ANB}$ (1)

Mà $S_{\Delta NAB} = \frac{1}{2}NA.NB.\sin\widehat{NAB} = \frac{1}{2}NA.NB.\sin\widehat{ACB} \Rightarrow NA.NB = \frac{2S_{\Delta NAB}}{\sin\widehat{ACB}}$ (2)

Dây cung AB chia đường tròn thành 2 cung. Ta tính được $cos\widehat{ACB} < 0$ nên $\widehat{ACB}$ là góc tù. Khi đó:

+ Nếu N thuộc cung chứa điểm C thì $\cos\widehat{ANB} = \cos\widehat{ACB} < 0$ (3)

+ Nếu N không thuộc cung chứa điểm C thì $\cos\widehat{ANB} = -\cos\widehat{ACB} > 0$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) ta có, để $\overrightarrow{NA}\overrightarrow{NB}$ min thì $\begin{cases} \cos\widehat{ANB} = \cos\widehat{ACB} < 0 \\ NA.NB\ max \end{cases}$

Hay điểm N thuộc cung AB chứa điểm C sao cho $S_{\Delta NAB}$ max. Mặt khác $S_{\Delta NAB} = \frac{1}{2}.d(N, AB).AB$

Nên ta sẽ tìm điểm N thuộc cung AB chứa điểm C sao cho $d(N, AB)$ max.

Tóm lại điểm N nằm chính giữa cung AB chứa điểm C. Từ đó tìm được $N\left(2+\sqrt{\frac{17}{2}}; -3-3\sqrt{\frac{17}{2}}\right)$.

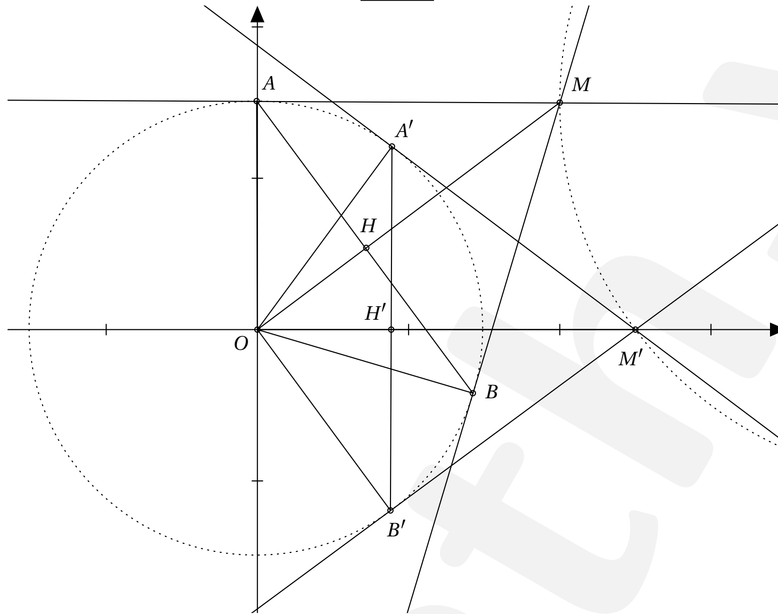
(+) Trường hợp N trùng A hoặc B thì $\overrightarrow{NA}\overrightarrow{NB} > 0$ nên bị loại.

Kết luận: $N\left(2+\sqrt{\frac{17}{2}}; -3-3\sqrt{\frac{17}{2}}\right)$ □

2 Đường tròn - Đường elip

Bài 1. *Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $(C): x^2+y^2-18x-6y+65=0$ và $\left(C'\right): x^2+y^2=9$ Từ điểm M thuộc đường tròn (C) kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (C'), gọi A, B là các tiếp điểm. Tìm tọa độ điểm M, biết độ dài đoạn AB bằng $4,8$.*

Giải:



Đường tròn (C') có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=OA=3$. Gọi $H=AB\bigcap OM$,
do H là trung điểm của AB nên $AH=\dfrac{12}{5}$. Suy ra: $OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\dfrac{9}{5}$ và $OM=\dfrac{OA^2}{OH}=5$

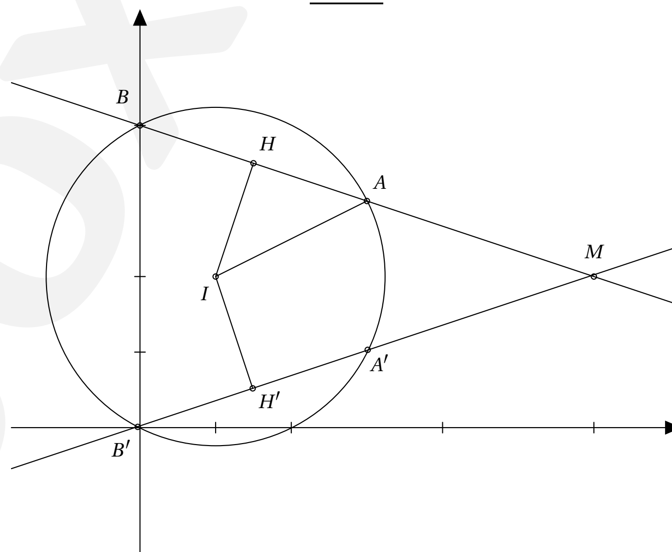
Đặt $M(x;y)$, ta có: $\begin{cases} M\in(C) \\ OM=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-18x-6y+65=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-15=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9x+20=0 \\ y=15-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy, trên (C) có hai điểm M thỏa đề bài là: $M(4;3)$ hoặc $M(5;0)$. □

Bài 2. *Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(6;2)$ và đường tròn $(C): (x-1)^2+\left(y-2\right)^2=5$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{10}$.*

Giải:



Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB, ta có:

$$IH^2 = IA^2 - AH^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4} = 5 - \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Đường thẳng (d) đi qua M và có VTPT $\overrightarrow{n} = (a;b)$ $\left(a^2+b^2 \neq 0\right)$ có dạng:

$$a(x-6) + b\left(y-2\right) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 6a - 2b = 0$$

Đường thẳng (d) thỏa đề bài khi:

$$d(I;(d)) = IH \Leftrightarrow \frac{|a+2b-6a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 9a^2 = b^2 \Leftrightarrow b = \pm 3a$$

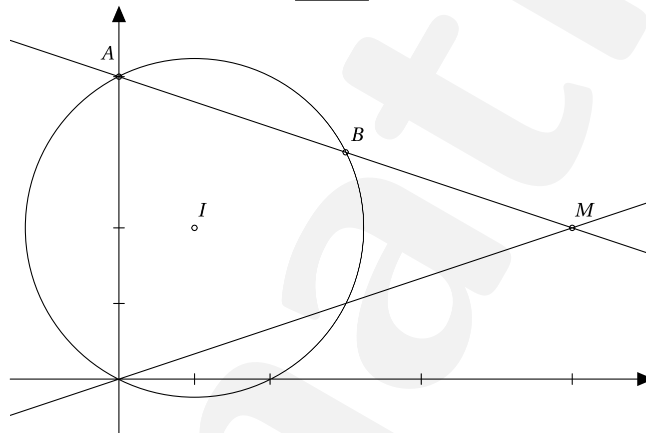
Với $b=-3a$ ta được $(d): x-3y=0$

Với $b=3a$ ta được $(d): x+3y-12=0$

Vậy, có hai đường thẳng thỏa đề bài là: $(d): x-3y=0$ hoặc $(d): x+3y-12=0$ □

Bài 3. *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+\left(y-2\right)^2=5$ và điểm $M(6;2)$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A,B sao cho $AB=\sqrt{10}$*

Giải:



Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB, ta có:

$$IH^2 = IA^2 - AH^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4} = 5 - \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Đường thẳng (d) đi qua M và có VTPT $\overrightarrow{n} = (a;b)$ có dạng:

$$a(x-6) + b\left(y-2\right) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 6a - 2b = 0$$

Đường thẳng (d) thỏa đề bài khi:

$$d(I;(d)) = IH \Leftrightarrow \frac{|a+2b-6a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 9a^2 = b^2 \Leftrightarrow b = \pm 3a$$

Với $b=-3a$ ta được $(d): x-3y=0$

Với $b=3a$ ta được $(d): x+3y-12=0$

Vậy có 2 phương trình $(d): x-3y=0$ hoặc $(d): x+3y-12=0$ □

Bài 4. *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y=0$ và đường thẳng $(d): x-y+1=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng (d) mà qua đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến MA và MB với (C) (A,B là hai tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMB}=60^o$.*

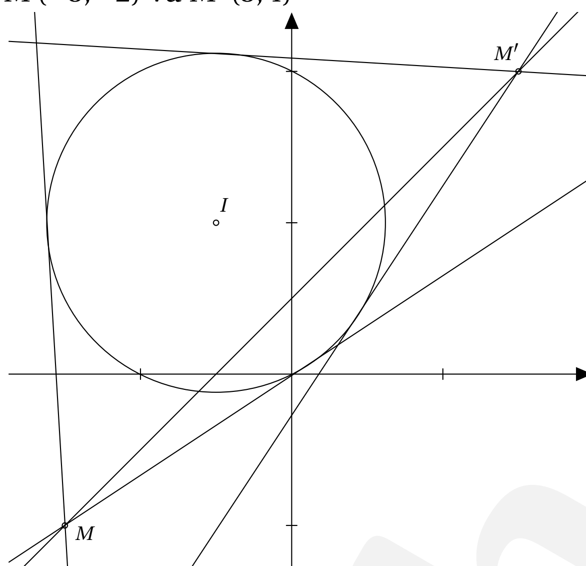
Giải:

(C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$ Theo giả thiết: $\widehat{AMB}=60^o \Rightarrow \widehat{AMI}=\frac{1}{2}\widehat{AMB}=30^o$

Tam giác AMI vuông tại A nên: $\sin 30^o = \dfrac{AI}{IM} \Rightarrow IM = 2AI = 2R = 2\sqrt{5}$

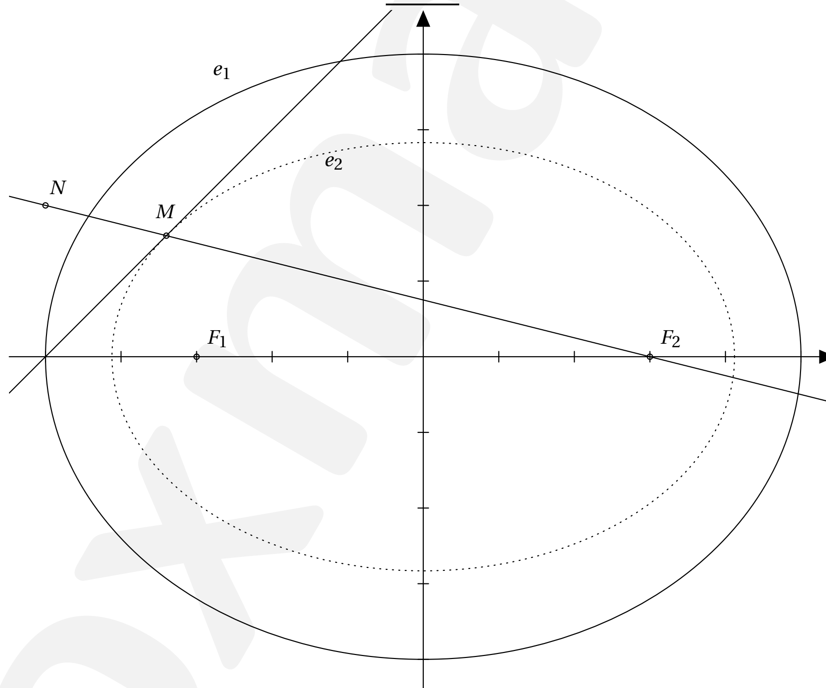
Đặt $M(t;t+1) \in (d)$, ta có: $IM^2 = 20 \Leftrightarrow (t+1)^2 + (t-1)^2 = 20 \Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 3$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M(-3;-2)$ và $M'(3;4)$ □



Bài 5. *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta : x - y + 5 = 0$ và hai elip $(E_1) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $(E_2) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ có cùng tiêu điểm. Biết rằng (E_2) đi qua điểm M thuộc đường thẳng Δ. Tìm tọa độ điểm Msao cho elip (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất.*

Giải:



Elip (E_1) có tiêu điểm là $F_1(-3;0); F_2(3;0)$ và F_1, F_2 nằm khác phía đối với Δ

Vì $M \in (E_2)$ và F_1, F_2 là tiêu điểm của (E_2) nên $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Do đó: (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất$\Leftrightarrow MF_1 + MF_2$ nhỏ nhất

Gọi Nlà điểm đối xứng của F_1 qua Δ. Ta có: $MF_1 + MF_2 = NM + MF_2 \geq NF_2$ (không đổi)

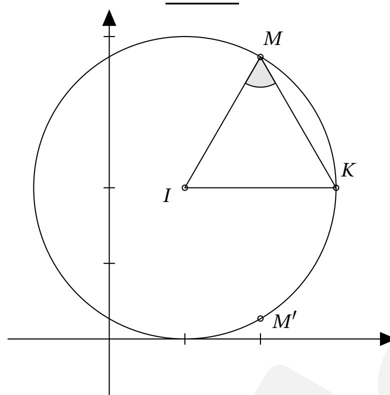
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M = NF_2 \cap \Delta$. Tìm được $N(-5;2)$ và $(NF_2) : x + 4y - 3 = 0$

Tọa độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{17}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm M thỏa đề bài là $M\left(-\frac{17}{5};\frac{8}{5}\right)$. □

Bài 6. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $K(3;2)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+1=0$ với tâm là I. Tìm tọa độ điểm $M \in (C)$ sao cho $\widehat{IMK}=60^o$.*

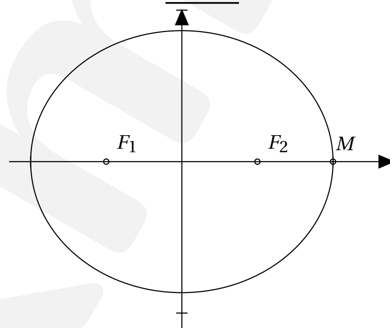
Giải:



Ta có $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=4$. Suy ra tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=2$.
Nhận thấy $IK=2$. Suy ra $K \in (C)$. Do $M \in (C)$ và $\widehat{IMK}=60^o$.
Suy ra $\triangle IMK$ đều. Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Tìm $M \in (C)$ sao cho $KM=R=2$.
Giả sử $M(x_0,\ y_0) \in (C) \Leftrightarrow (x_0-1)^2+(y_0-2)^2=4 \quad (1)$
Ta có $KM=2 \ \Leftrightarrow (x_0-3)^2+(y_0-2)^2=4 \quad (2)$
Từ (1) và (2) suy ra $M(2\ ;\ 2+\sqrt{3})$ hay $M(2\ ;\ 2-\sqrt{3})$ □

Bài 7. *Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 lần lượt nằm bên trái và bên phải trục tung. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1^2+7MF_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

Giải:



Giả sử $M(x_0\,;\ y_0) \in (E)$. Khi đó $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1 \quad (*)$ và $-2 \le x_0 \le 2$.
(E) có $a=2,\ c=\sqrt{4-3}=1$. Suy ra $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.
Ta có $MF_1^2+7MF_2^2=(a+ex_0)^2+7(a-ex_0)^2=8a^2-12aex_0+8e^2x_0^2=2x_0^2-12x_0+32.$
Xét hàm $f(x_0)=2x_0^2-12x_0+32$ trên $[-2;\ 2]$.
Ta có $f'(x_0)=4x_0-12<0,\ \forall x_0 \in [-2;\ 2]$. Suy ra $\min\limits_{x_0\in[-2;\ 2]} f(x_0)=f(2)$.
Suy ra $\min\left(MF_1^2+7MF_2^2\right)=16$, đạt khi $x_0=2$. Thay vào $(*)$ ta có $y_0=0$.
Vậy $M(2;\ 0)$. □

Bài 8. *Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho parabol $(P): y^2=4x$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua tiêu điểm của (P), cắt (P) tại A và B sao cho $AB=4$.*

Giải:

$(P): y^2 = 4x$ có $p = 2$. Suy ra tiêu điểm $F(1\,;\,0)$.

TH 1. $d \perp Ox$. Khi đó pt $d: x = 1$. Từ hệ $\begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1\,;2) \\ B(1\,;-2) \end{cases} \Rightarrow AB = 4$. Vậy $x = 1$ thỏa mãn.

TH 2. $d \not\perp Ox$. Khi đó pt $d: y = k(x-1)$.

Tọa độ A, B là nghiệm của $\begin{cases} y = kx - k \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx - k \\ (kx-k)^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow k^2x^2 - 2(k^2+2)x + k^2 = 0 \quad (*)$

Ta có d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta' = 4k^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \neq 0$.

Giả sử $A(x_1\,;\,kx_1 - k)$, $B(x_2\,;\,kx_2 - k)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$.

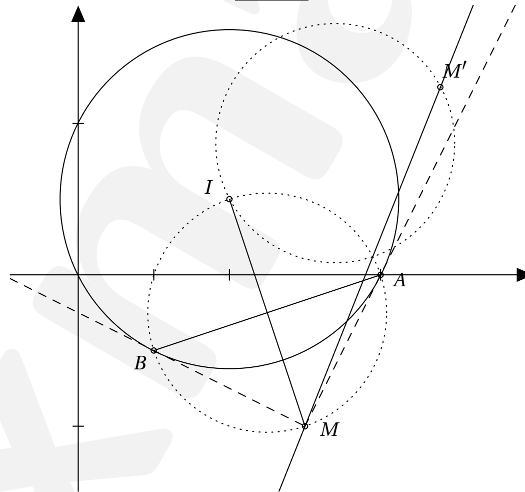
Ta có $AB^2 = (1+k^2)(x_2-x_1)^2 = (1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]^2 = (1+k^2)\left[\dfrac{4(k^2+2)^2}{k^4} - 4\right] = \dfrac{16(1+k^2)^2}{k^4}$.

Suy ra $AB = \dfrac{4(1+k^2)}{k^2} = \dfrac{4}{k^2} + 4 > 4$, không thỏa mãn.

Vậy phương trình $d: x = 1$ hay $x - 1 = 0$. □

Bài 9. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường thẳng $\Delta: 5x - 2y - 19 = 0$. Từ một điểm M nằm trên đường thẳng Δ kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A và B là hai tiếp điểm). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB biết rằng $AB = \sqrt{10}$.*

Giải:



Đường tròn (C) có tâm $I(2;\,1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$. Gọi $H = MI \cap AB$. Ta có $AH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Trong tam giác vuông MAI (tại A) với đường cao AH ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{4}{10} - \frac{1}{5} \Rightarrow AM = \sqrt{5} \Rightarrow MI = \sqrt{10}.$$

Ta có $$\Delta: 5x - 2y - 19 = 0 \Leftrightarrow \Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{5} \Rightarrow M(5+2m;\,3+5m)$$

Khi đó $MI = \sqrt{10} \Leftrightarrow (3+2m)^2 + (2+5m)^2 = 10 \Leftrightarrow 29m^2 + 32m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = -\dfrac{3}{29}$.

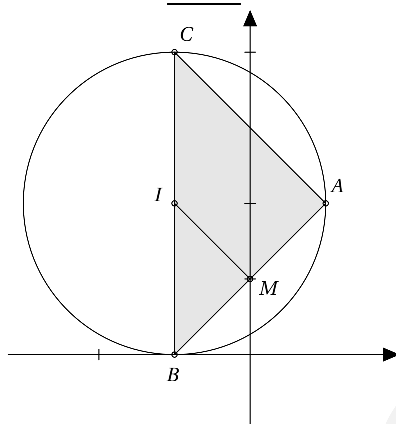
Chú ý rằng, đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB là đường tròn đường kính MI.

Với $m = -1$ ta có $M(3;\,-2)$. Khi đó pt đường tròn ngoại tiếp ΔAMB là $\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$.

Với $m = -\dfrac{3}{29}$ ta có $M\left(\dfrac{139}{29};\,\dfrac{72}{29}\right)$. Khi đó pt đt ngoại tiếp ΔAMB là $\left(x - \dfrac{197}{58}\right)^2 + \left(y - \dfrac{101}{58}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$. □

Bài 10. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết điểm $M(0;\ 1)$ là trung điểm cạnh AB và điểm A có hoành độ dương.*

Giải:



Đường tròn (C) có tâm $I(-1;\ 2)$, bán kính $IA = 2$.
Ta có $\overrightarrow{IM} = (1;\ -1)$, $IM \perp AB$ suy ra phương trình đường thẳng $AB : x - y + 1 = 0$. $A \in AB \Rightarrow A(a;\ a+1)$.
Khi đó $IA = 2 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$ (do $a > 0$). Suy ra $A(1;\ 2); B(-1;\ 0)$.
Ta có $\overrightarrow{IA} = (2;\ 0)$, $IA \perp BC$ suy ra phương trình $BC : x + 1 = 0$, phương trình $AI : y - 2 = 0$.
Gọi N là giao điểm của AI và BC. Suy ra $N(-1;\ 2)$ và N là trung điểm BC. Suy ra $C(-1;\ 4)$. □

Bài 11. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{3} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (H) (F_1 có hoành độ âm). Tìm tọa độ điểm M thuộc (H) sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 60^o$ và điểm M có hoành độ dương.*

Giải:

(H) có $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2$. Lấy $M(x_M;\ y_M) \in (H)$, $x_M > 0$. Khi đó $MF_1 = 1 + 2x_M$, $MF_2 = -1 + 2x_M$. Xét ΔMF_1F_2 ta có: $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2.\cos 60^0$

$$\Leftrightarrow 16 = (1+2x_M)^2 + (-1+2x_M)^2 - (1+2x_M)(-1+2x_M) \Leftrightarrow x_M^2 = \frac{13}{4} \Leftrightarrow x_M = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ (do } x_M > 0).$$

Suy ra $y_M^2 = \dfrac{27}{4} \Leftrightarrow y_M = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $M\left(\dfrac{\sqrt{13}}{2};\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{\sqrt{13}}{2};\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. □

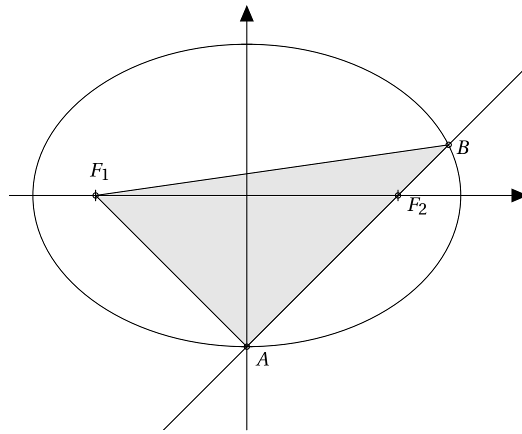
Bài 12. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E) : \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ có các tiêu điểm F_1, F_2 (F_1 có hoành độ âm). Đường thẳng d đi qua F_2 và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất cắt (E) tại A và B. Tính diện tích tam giác ABF_1.*

Giải:

$(E) : \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ có $c = \sqrt{8-4} = 2 \Rightarrow F_1(-2;\ 0)$, $F_2(2;\ 0)$.
Từ giả thiết $\Rightarrow d : y = x - 2$ hay $x - y - 2 = 0$.

Từ hệ $\begin{cases} y = x - 2 \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow A(0;\ -2)$, $B\left(\dfrac{8}{3};\ \dfrac{2}{3}\right)$.

Vậy $S_{F_1AB} = \dfrac{1}{2}AB.d(F_1;\ AB) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{8}{3}\sqrt{2}.2\sqrt{2} = \dfrac{16}{3}$. □



Bài 13. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y^2 = 2x$ và điểm $K(2;0)$. Đường thẳng d đi qua K cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN nằm trên đường thẳng d.*

Giải:

TH1: $d \perp Ox \Rightarrow d: x = 2$. Từ $\begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2;\ 2) \\ N(2;\ -2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 0. \quad (1)$

TH2: $d \not\perp Ox \Rightarrow d: y = kx - 2k$. Tọa độ M, N là nghiệm của

$$\begin{cases} y = kx - 2k \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2} \\ y = k.\dfrac{y^2}{2} - 2k \end{cases} \Rightarrow ky^2 - 2y - 4k = 0. \quad (2)$$

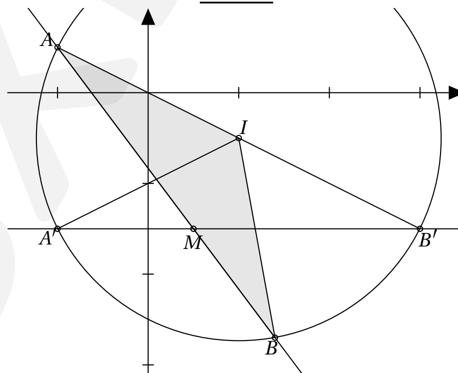
Để d cắt (P) tại M, N phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k \neq 0$.

Gọi $M\left(\dfrac{y_1^2}{2};\ y_1\right)$, $N\left(\dfrac{y_2^2}{2};\ y_2\right)$ trong đó $y_1,\ y_2$ là nghiệm của (2).

Ta có $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \left(\dfrac{y_1 y_2}{2}\right)^2 + y_1 y_2 = (-2)^2 + (-4) = 0.$ □

Bài 14. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$. Gọi I là tâm đường tròn (C). Đường thẳng Δ đi qua $M(1;-3)$ cắt (C) tại hai điểm A và B. Viết phương trình đường thẳng Δ biết tam giác IAB có diện tích bằng 8 và cạnh AB là cạnh lớn nhất.*

Giải:



Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Gọi H là trung điểm AB. Đặt $AH = x$ $(0 < x < 2\sqrt{5})$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{2}IH.AB = 8 \Leftrightarrow x\sqrt{20 - x^2} = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \text{ (không thỏa mãn vì } AB < IA) \end{array}\right.$$

nên $AH = 4 \Rightarrow IH = 2$. Pt đường thẳng qua M: $a(x-1) + b(y+3) = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0) \Leftrightarrow ax + by + 3b - a = 0$.

Ta có $\quad d(I,\ AB) = IH = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \Leftrightarrow a(3a-4b) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hay $a = \dfrac{4}{3}b$.

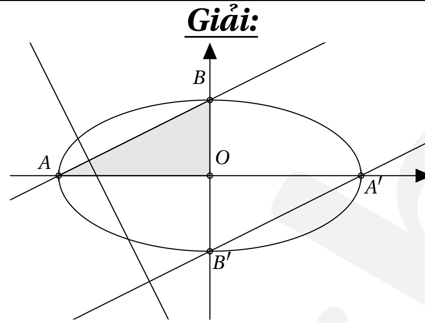
* Với $a = 0$ ta có pt $\Delta: y+3=0$.

* Với $a = \dfrac{4}{3}b$. Chọn $b = 3$ ta có $a = 4$. Suy ra pt $\Delta: 4x+3y+5=0$.

Vậy có hai đường thẳng Δ thỏa mãn là $y+3=0$ và $4x+3y+5=0$. □

Bài 15. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x+y+3=0$ và elíp $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1.*

Giải:



$\Delta \perp d \Rightarrow$ pt Δ có dạng $x-2y+m=0$. Tọa độ A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2y+m=0 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y-m \\ 8y^2-4my+m^2-4=0 \quad (1) \end{cases}$$

d cắt (E) tại hai điểm $A, B \Leftrightarrow$ hệ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 32-4m^2>0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. $\quad (*)$

Gọi $A(2y_1-m;\ y_1),\ B(2y_2-m;\ y_2)$ trong đó $y_1,\ y_2$ là nghiệm của $(1) \Rightarrow y_1+y_2=\dfrac{m}{2},\ y_1y_2=\dfrac{m^2-4}{8}$.

$$\Rightarrow AB^2 = 5(y_2-y_1)^2 = 5[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2] = \frac{5(8-m^2)}{4} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{5}.\sqrt{8-m^2}}{2}.$$

Đường cao $OH = d(O,\Delta) = \dfrac{|m|}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OH.AB = \dfrac{\sqrt{m^2(8-m^2)}}{4} = 1$

$$\Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2 \text{ (thỏa mãn } (*)).$$

Suy ra phương trình $\Delta: x-2y+2=0$ hoặc $x-2y-2=0$. □

Bài 16. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y^2=4x$ có tiêu điểm F. Gọi M là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{FM} = -3\overrightarrow{FO}$; d là đường thẳng bất kì đi qua M, d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng tam giác OAB là tam giác vuông.*

Giải:

$(P): y^2=4x$ có $p=2 \Rightarrow$ tiêu điểm $F(1;\ 0) \Rightarrow M(4;\ 0)$.

Nếu $d \perp Ox \Rightarrow$ pt $d: x=4$. Từ hệ

$$\begin{cases} y^2=4x \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4;\ 4) \\ B(4;\ -4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 16-16=0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^o.$$

Nếu $d \not\perp Ox \Rightarrow$ pt $d: y=k(x-4)$. Tọa độ A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y=kx-4k \\ y^2=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{y^2}{4} \\ ky^2-4y-16k=0 \quad (1) \end{cases}$$

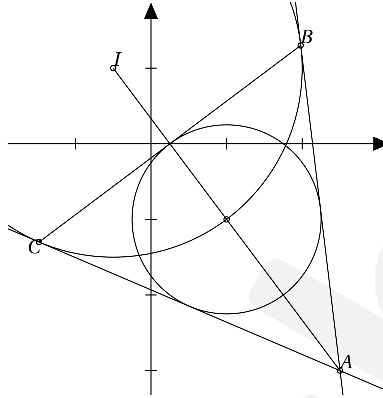
Điều kiện d cắt (P) tại hai điểm phân biệt là pt (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k \neq 0$.

Giả sử $A\left(\dfrac{y_1^2}{4};\ y_1\right),\ B\left(\dfrac{y_2^2}{4};\ y_2\right)$ trong đó $y_1,\ y_2$ là nghiệm của $(2) \Rightarrow y_1y_2=-16$.

Ta có $$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\left(\frac{y_1y_2}{4}\right)^2+y_1y_2=(-4)^2-16=0\Rightarrow \widehat{AOB}=90^o.$$
Suy ra OA vuông góc với OB hay tam giác OAB vuông trong mọi trường hợp. □

Bài 17. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-20=0$ và điểm $A(5;-6)$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (C) với B, C là các tiếp điểm. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

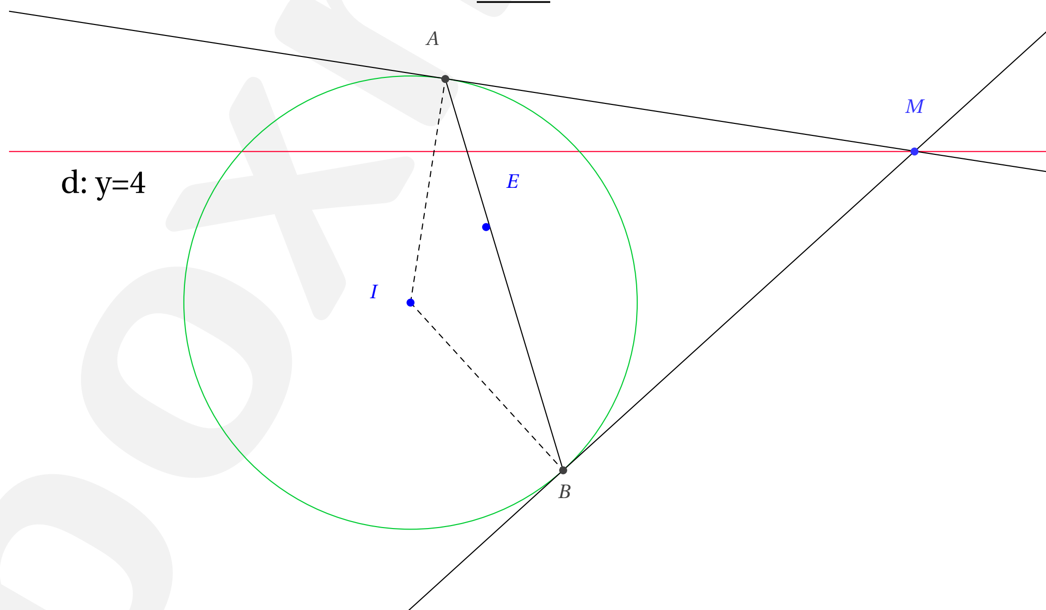
Giải:



(C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=5$, BC cắt IA tại H. Ta có $AI=10\Rightarrow IH=\dfrac{IB^2}{IA}=\dfrac{5}{2}$.
Do đó $\overrightarrow{IH}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{IA}\Rightarrow H\left(\dfrac{1}{2};0\right)$; $\cos\widehat{AIB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AIB}=60^o\Rightarrow\widehat{ABC}=60^o$ nên ABC là tam giác đều.
Suy ra tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$ trùng với trọng tâm. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.
Ta có $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AH}\Rightarrow G(2;-2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp là $r=GH=\dfrac{5}{2}$.
Suy ra phương trình đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là $(x-2)^2+(y+2)^2=\dfrac{25}{4}$. □

Bài 18. *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-4=0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng $y=4$ sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) và AB đi qua điểm $E(2;3)$.*

Giải:



•Cách 1: Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.
Gọi $M(m;4)$ thuộc $y=4$. Giả sử điểm $H(x;y)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến đường tròn.

Khi đó :

$$\begin{cases} H \in (C) \\ \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{IH} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Với :

$$\overrightarrow{MH} = (x-m; y-4); \overrightarrow{IH} = (1-x; y-2)$$

Lúc đó hệ phương trình (1) trở thành :

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2-4y-4=0 \\ (x-m)(x-1)+(y-4)(y-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+y^2-4y-4=0 \quad (2) \\ x^2+y^2-(m+1)x-6y+m-8=0 \quad (3) \end{cases}$$

Lấy (3) – (2) vế theo vế ta có phương trình :

$$(1-m)x+2y+m-4=0$$

Điều này chứng tỏ đường thẳng đi qua hai tiếp điểm A, B có phương trình $(AB): (1-m)x+2y+m-4=0$

Theo giả thiết ta có $E(2;3) \in AB$ nên $(1-m)2+2.3+m-4=0 \Leftrightarrow m=4$.

Vậy $\boxed{m=4}$ là giá trị cần tìm. □

•Cách 2:(HD cách làm) Qua bài này ta có với A, B là 2 tiếp điểm của 2 tiếp tuyến kẻ từ $M(x_o; y_o)$ tới đường tròn $(C): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ thì ta có phương trình đường thẳng $(AB): (x_o-a)(x-a)+(y_o-b)(y-b)=R^2$.

Chứng minh:

Đường tròn (C) có:

+ Tâm $I(a;b)$.

+ Bán kính R.

Gọi $A(m;n)$ là 1 tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M, do $A \in (C)$ nên ta có:

$$(m-a)^2+(n-b)^2=R^2$$

$\overrightarrow{IA} = (m-a; n-a)$.

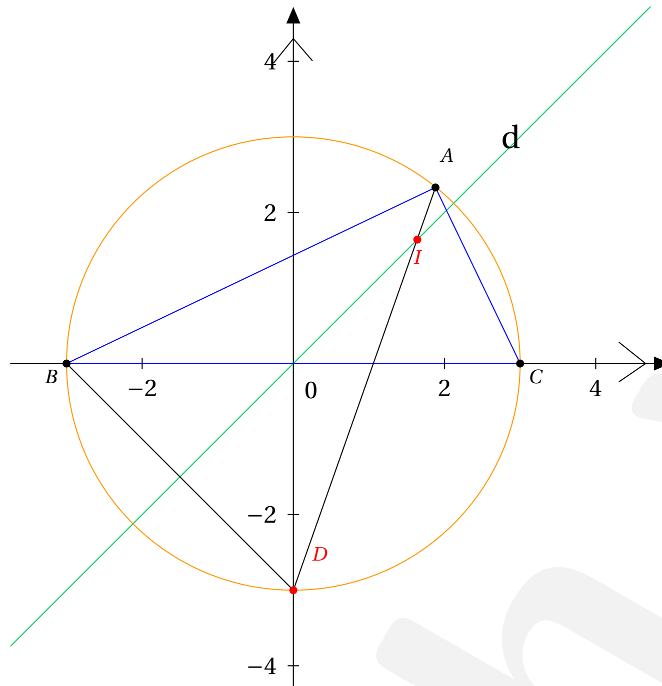
Phương trình đường thẳng AM là:

$$\begin{aligned} AM: &(m-a)(x-m)+(n-b)(y-n)=0 \\ &\Leftrightarrow (m-a)(x-a)+(n-b)(y-b)=(m-a)^2+(n-b)^2=R^2 \end{aligned}$$

Do $M \in MA$ nên ta có: $(x_o-a)(m-a)+(y_o-b)(n-b)=R^2$ Do đó A thuộc đường thẳng $\Delta: (x_o-a)(m-a)+(y_o-b)(n-b)=R^2$ Tương tự ta cũng có $B \in \Delta$ Vậy phương trình đường thẳng AB là: $(x_o-a)(m-a)+(y_o-b)(n-b)=R^2$. □

Bài 19. *Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A với $B(-3;0), C(3;0)$. Biết tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC thuộc đường thẳng $(d): y=x$. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết I có tung độ dương.*

Giải:



Vì ΔABC vuông tại A và $B(-3;0), C(3;0)$ suy ra A nằm trên đường tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính $R = 3$.

I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên AI là đường phân giác trong của ΔABC. Gọi D là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó, dễ dàng chứng minh được DBC vuông cân tại D và suy ra được $D(0;-3)$.

Hơn nữa, ta có

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{DBC} = \widehat{DAB} \text{ (cặp góc nt cùng chắn 1 cung)}\\ \widehat{IBC} = \widehat{IBA} \text{ (vì BI là phân giác)}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DBI} = \widehat{BID}$$

Do đó tam giác BID cân tại D. Suy ra $ID = BD = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

Giả sử $I(a;a) \in (d)$.Ta có $\sqrt{(a+3)^2+a^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{-3\pm 3\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $I(\dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2}; \dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2})$ (Vì $a > 0$).

Và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là $r = d(I, BC) = \dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2}$.

Kết luận: phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC là

$$\boxed{\left(x - \frac{-3+3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{-3+3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{36-18\sqrt{3}}{4}}.$$ □

Bài 20. *Trong mặt phẳng Oxy cho $(E): \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $\Delta: x+y+9=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc Δ, tiếp xúc với (E) có bán kính nhỏ nhất.*

Giải:

•Cách 1:

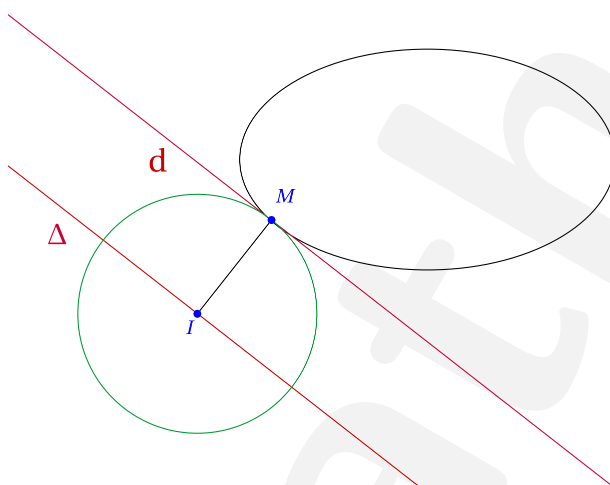
Gọi d là đường thẳng song song với Δ và tiếp xúc với $Elip$, và khoảng cách từ d đến $Elip$ gần nhất.

Phương trình đường thẳng d có dạng: $d: \ x+y+c=0$

Đường thẳng d tiếp xúc với $Elip$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1\\ x+y+c=0\end{cases} \Leftrightarrow c = \pm 3$$

Với $c = 3$ thì khoảng cách d và Δ là nhỏ nhất, vậy $d: \ x + y + 3 = 0$.
Tiếp điểm của d và $Elip$ là: $M(-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3})$
Gọi (C) là đường tròn cần tìm có tâm I và bán kính R.
$I \in \Delta \Rightarrow I(a; -a-9)$
Ta có: $R \geq d(d;\Delta) = \dfrac{|-3+9|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi, I là giao điểm của đường thẳng qua M vuông góc với d và đường thẳng Δ. Khi đó (C) tiếp xúc với (d) và (E) tại M.
Từ đó tìm được tâm $I\left(-\frac{14}{3}; -\frac{13}{3}\right)$ và $R = 3\sqrt{2}$
Kết luận: PT đường tròn $(C): \left(x + \frac{14}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{3}\right)^2 = 18$



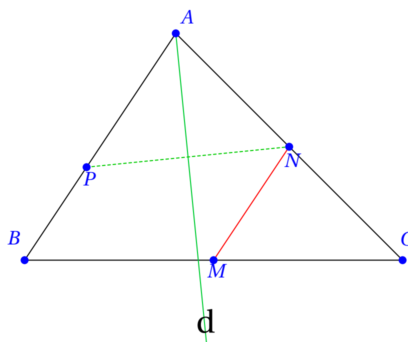
•Cách 2:
Gọi (C) là đường tròn cần tìm, có tâm I và bán kính R.
$I \in \Delta \Rightarrow I(a; -a-9)$
Gọi $M(m;n)$ là tiếp điểm của (C) và (E), suy ra: $\dfrac{m^2}{5} + \dfrac{n^2}{4} = 1$
Theo BĐT Cauchy-Schwarz, ta có: $(m+n)^2 \leq \left(\dfrac{m^2}{5} + \dfrac{n^2}{4}\right)(5+4) = 9 \Rightarrow m + n \geq -3$
Mà ta có: $R^2 = (m-a)^2 + (n+a+9)^2 \geq \dfrac{(m-a+n+a+9)^2}{2} = \dfrac{(m+n+9)^2}{2} \geq 18$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} m - a = n + a + 9 \\ \dfrac{m}{5} = \dfrac{n}{4} \\ \dfrac{m^2}{5} + \dfrac{n^2}{4} = 1 \\ m + n = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{5}{3} \\ n = -\dfrac{4}{3} \\ a = -\dfrac{14}{3} \end{cases}$

Khi đó ta có, $I\left(-\frac{14}{3}; -\frac{13}{3}\right)$, $R = 3\sqrt{2}$, ta sẽ chứng minh (C) tiếp xúc (E). Thật vậy, lập phương trình hoành độ của C và E ta dễ dàng chứng minh điều này. □

Bài 21. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right); N\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm của BC, AC và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \frac{1}{3}t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$.*
Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

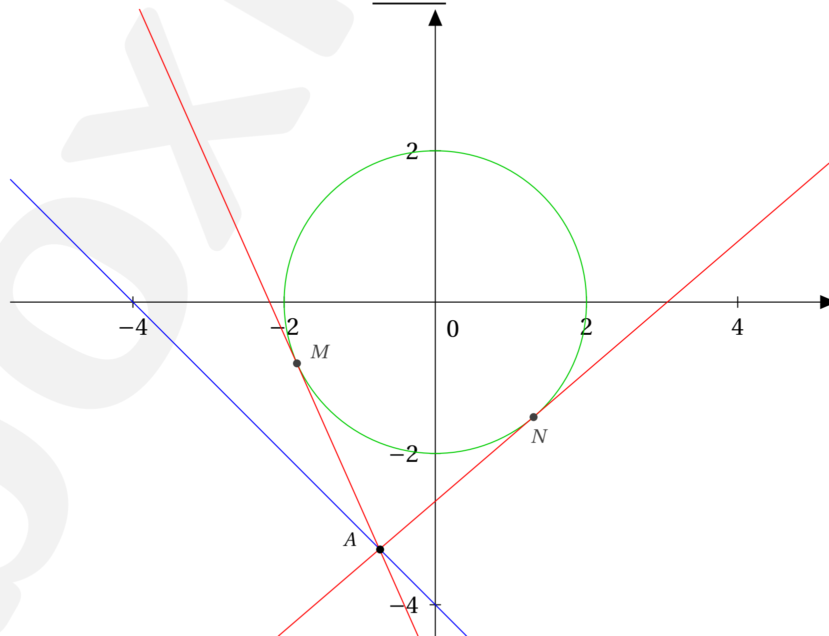
Giải:



Nhận xét: Cho góc xOy và Δ là đường phân giác của xOy. Khi đó với mỗi điểm $M \in Ox$ thì điểm đối xứng với M sẽ thuộc Oy.
Như vậy ta có lời giải như sau:
Đường thẳng d thực chất có phương trình tổng quát là $x-1=0$.
Ta gọi P là điểm đối xứng của N qua đường thẳng d.
Đường thẳng qua N vuông góc với d có phương trình: $y+\dfrac{5}{2}=0$
Suy ra hình chiếu của N trên đường thẳng d là $H\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$. Vì H là trung điểm của NP nên ta tìm được $P\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$
Mặt khác, ta có $MN \parallel AB$ nên $\vec{u}_{AB}=\overrightarrow{MN}=(-1;-1) \Rightarrow vtn_{AB}=(1;-1)$và $P\in AB$. Suy ra $AB: x-y+1=0$
A là giao điểm của d và AB nên tìm được $A(1;2)$
N là trung điểm của AC nên tìm được $C(0;3)$
M là trung điểm của BC nên tìm được $B(3;4)$
Cuối cùng, ta sẽ lập phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A,B,C.
Kết luận, đường tròn ngoại tiếp ΔABC có phương trình $\boxed{x^2+y^2-3x-7y+12=0.}$ □

Bài 22. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4=0$ và đường thẳng $(d): x+y+4=0$. Tìm điểm A thuộc (d) sao cho từ A vẽ được 2 tiếp tuyến tiếp xúc (C) tại M,N thoả mãn diện tích tam giác AMN bằng $3\sqrt{3}$.*

Giải:



Điểm $A \in d \Rightarrow A(a;-4-a)$ Đặt $\widehat{MAN} = 2\alpha,\ OA = x > 0$

Ta có: $\sin\alpha = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{2}{OA}, \cos\alpha = \dfrac{AM}{OA} \Rightarrow \sin 2\alpha = \dfrac{4\sqrt{x^2-4}}{x^2}$

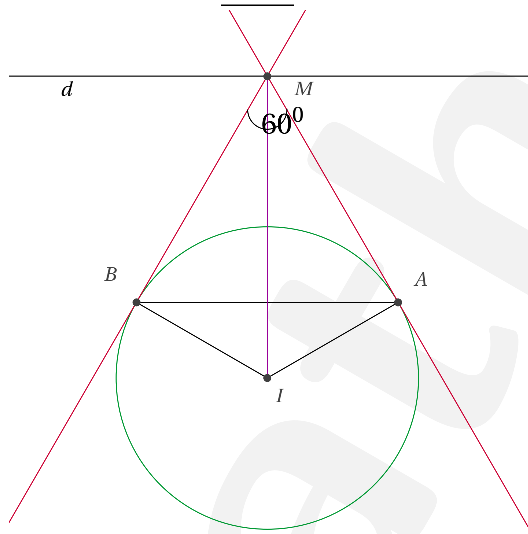
Suy ra: $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}\left(x^2-4\right)\dfrac{4\sqrt{x^2-4}}{x^2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 4\left(x^2-4\right)^3 = 27x^4 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$

Từ đó ta có: $OA = 4 \Leftrightarrow a^2 + (4+a)^2 = 4 \Leftrightarrow a = -4 \vee a = 0$

Vậy toạ độ điểm A cần tìm là: $A(-4;0) \vee A(0;-4)$ □

Bài 23. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $(d): x-y+1=0$ và đường tròn: $(C)\, x^2+y^2+2x-4y=0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) sao cho từ M kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn tại A và B sao cho $\widehat{AMB} = 60^o$.*

Giải:



Đọc bài toán ta nhận thấy một điều rằng, đó là ΔMBC là tam giác đều (Vì $MA = MB$ và: $\widehat{AMB} = 60^o$).

Viết lại phương trình đường tròn dưới dạng: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$

Đường tròn có tâm $I(-1;2)$ và bán kính: $R = \sqrt{5}$.

Ta luôn có tứ giác $IAMB$ nội tiếp đường tròn vì: $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 90^o$, suy ra: $\widehat{AMB} + \widehat{AIB} = 180^o \Rightarrow \widehat{AIB} = 120^o$

Xét ΔABC, ta có: $AB^2 = IA^2 + IB^2 - 2IA.IB.\cos\widehat{AIB} = 3R^2 = 15$

Mặt khác: ΔMBC là tam giác đều nên: $MA = AB \Leftrightarrow MA^2 = AB^2 = 15$.

Áp dụng định lí Pytago cho ΔMAI ta có: $MI^2 = MA^2 + AI^2 = 15 + 5 = 20$

Do $M \in d$ nên tọa độ M có dạng: $(x_0; x_0+1)$

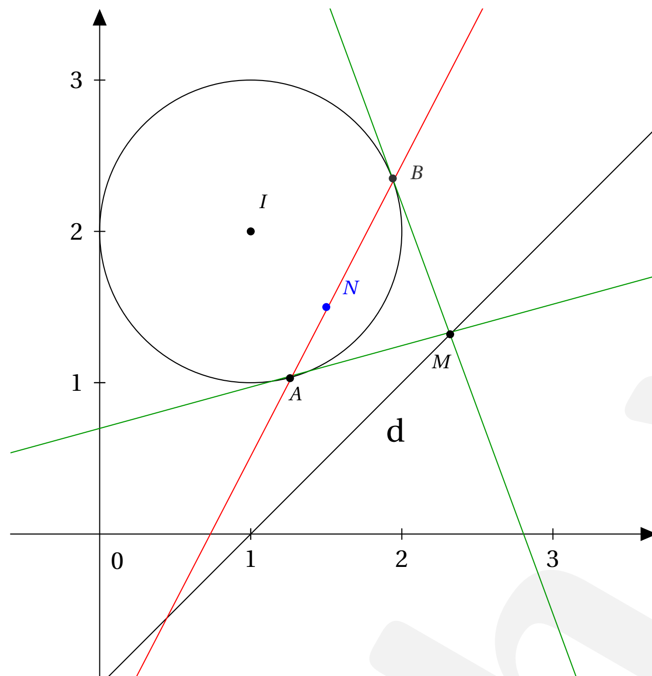
Khi đó ta có:

$$MI^2 = (x_0+1)^2 + (x_0-1)^2 = 20 \Leftrightarrow x_0^2 = 9 \Leftrightarrow x_0 = 3; x_0 = -3$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn điều kiện bài toán: $(3;4);(-3;-2)$ □

Bài 24. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(T): x^2+y^2-2x-4y+4=0$ và đường thẳng (d): $x-y-1=0$. Từ M thuộc d kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến (T) trong đó A, B là các tiếp điểm. Chứng minh đường thẳng qua A, B luôn đi qua điểm cố định.*

Giải:



Phương trình đường tròn được viết lại $(T):(x-1)^2+(y-2)^2=1$

Gọi tọa độ các điểm là: $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2);M(x_0;y_0)$.

Ta có:

Tiếp tuyến tại A, qua M của đường tròn có dạng: $(x_0-1)(x_1-1)+(y_0-2)(y_1-2)=1$

Tiếp tuyến tại B, qua M của đường tròn có dạng: $(x_0-1)(x_2-1)+(y_0-2)(y_2-2)=1$

Dễ thấy 2 điểm $A;B$ đều thỏa mãn phương trình đường thẳng sau: $(x_0-1)(x-1)+(y_0-2)(y-2)=1$

Đó chính là phương trình đường thẳng AB.

Mà ta lại có: $M\in(d)$ nên: $M=(x_0;y_0)=(x_0;x_0-1)$. Thay lên phương trình trên ta được:

$$(x_0-1)(x-1)+(x_0-3)(y-2)=1$$

Gọi $N(x;y)$ là điểm cố định mà AB luôn đi qua với mọi x_0.

Khi đó phương trình: $(x_0-1)(x-1)+(x_0-3)(y-2)=1$ có nghiệm với mọi x_0.

Hay là: $x_0(x+y-3)+6-x-3y=0$ có nghiệm $\forall x_0\in\mathbb{R}$. $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3=0 \\ 6-x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{3}{2}$

Vậy điểm cố định cần tìm là: $\boxed{N\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)}$ □

Nhận xét: Trong lời giải trên ta đã sử dụng một bổ đề nhỏ:

Cho đường tròn $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Với mỗi điểm $M(x_0;y_0)$ nằm ngoài (C) kẻ 2 tiếp tuyến với (C) tại hai tiếp điểm A,B thì đường thẳng AB có phương trình $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$.

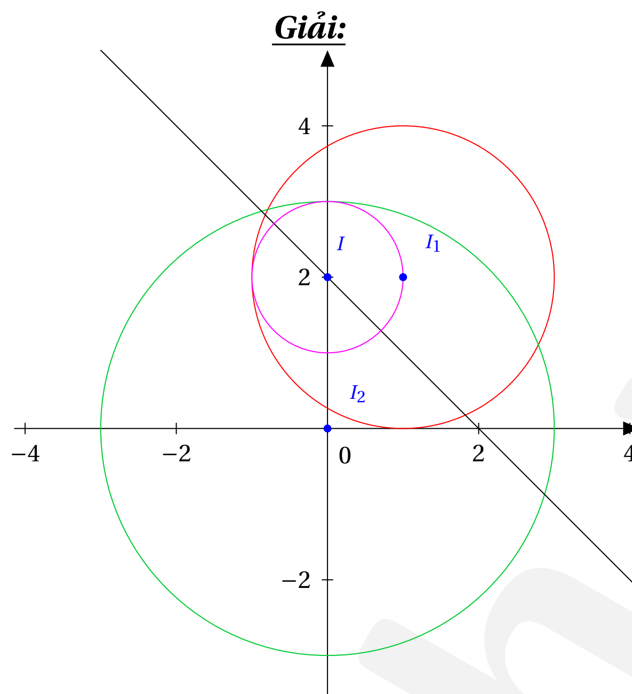
Bổ đề trên luôn đúng. Thật vậy, tọa độ A,B phải thỏa mãn hệ sau:

$$\begin{cases} \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AM}=0 & (1) \\ \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{BM}=0 & (2) \\ (x-a)^2+(y-b)^2=R^2 & (3) \end{cases}$$

Lấy $(1)-(3),(2)-(3)$ ta sẽ xây dựng được phương trình đường thẳng AB như trên.

Bài 25. *Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và $(C'):x^2+y^2=9$. Viết phương trình đường tròn tâm I tiếp xúc với cả hai đường tròn (C) và (C') biết rằng I thuộc đường thẳng $d:x+y-2=0$.*

Giải:



Bài toán này trước tiên ta cần phải lưu tâm đến vị trí của hai đường tròn bài toán cho. Cụ thể:
Đối với đường tròn (C) ta có tâm $I_1(1;2)$ và bán kính $R_1 = 2$
Đối với đường tròn (C') ta có tâm $I_2(0;0)$ và bán kính $R_2 = 3$
Từ đó ta có $I_1I_2 = \sqrt{5}$ nên ta suy ra được $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$. Do đó hai đường tròn (C) và (C') cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
Mặt khác đường thẳng d lại nằm giữa khoảng không gian giữa hai đường tròn nên đường tròn cần lập nếu có tiếp xúc với (C) và (C') thì có hai khả năng là tiếp xúc ngoài với (C) và (C') hoặc tiếp xúc trong với (C) và tiếp xúc trong với (C').
Từ đó ta có $I \in d : x + y - 2 = 0 \Rightarrow I(x, 2 - x)$ và gọi R là bán kính của đường tròn cần tìm.
•**Trường hợp 1:** Vì đường tròn cần tìm tiếp xúc ngoài cả (C) và (C') nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} R + R_1 = II_1 & (1) \\ R + R_2 = II_2 & (2) \end{cases}$$

Lấy $(1) - (2)$ vế theo vế ta được phương trình

$$R_1 - R_2 = II_1 - II_2 \quad (3)$$

•**Trường hợp 2:** Vì đường tròn cần tìm tiếp xúc trong với (C) và cũng tiếp xúc trong với (C') nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} II_1 = R_1 - R & (4) \\ II_2 = R_2 - R & (5) \end{cases}$$

Lấy $(4) - (5)$ vế theo vế ta có phương trình

$$II_1 - II_2 = R_1 - R_2 \quad (6)$$

Do (3) và (6) nên ta dẫn đến giải phương trình

$$\sqrt{(x-1)^2 + x^2} - \sqrt{x^2 + (2-x)^2} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 4x + 4} - 1$$

boxmath.vn

Bình phương hai vế phương trình này và thu gọn ta được phương trình

$$\sqrt{2x^2-4x+4}=2-3x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x \geq 0 \\ 2x^2-4x+4=(2-3x)^2 \end{cases} \Rightarrow x=0$$

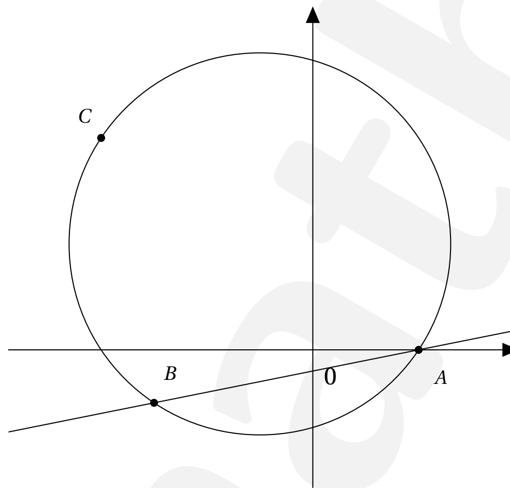
•Với $x=0$ thì ta có $II_1=1$ nên từ (1) ta có $R=1-2=-1$ (vô lý)

•Với $x=0$ thì ta có $II_1=1$ nên từ (4) ta có $R=2-1=1$ (nhận)

Do đó phương trình đường tròn cần tìm là : $\boxed{x^2+(y-2)^2=1}$ □

Bài 26. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-8=0$ và đường thẳng d: $x-5y-2=0$. Xác định tọa độ giao điểm A, B của đường tròn (C) và đường thẳng d (cho biết điểm A có hoành độ dương). Tìm tọa độ điểm C thuộc đường tròn (C) sao cho tam giác ABC vuông ở B.*

Giải:



Từ đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-8=0$ tọa độ tâm $I(-1;2)$

Tọa độ giao điểm A, B của đường thẳng d với (C) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y-8=0 \\ x-5y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5y+2)^2+y^2+2(5y+2)-4y-8=0 \\ x=5y+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vì A có hoành độ dương nên $A(2;0)$ và $B(-3;-1)$

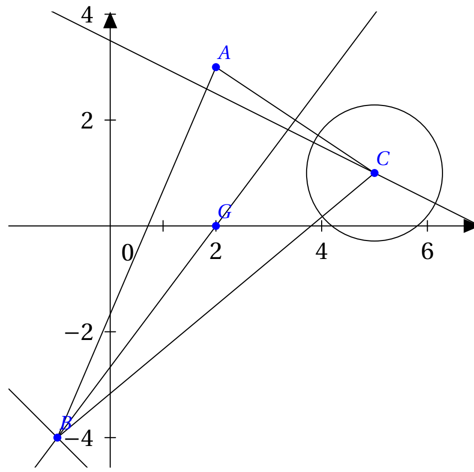
Mà $C \in (C)$ và tam giác ABC vuông ở B nên C là điểm đối xứng với A qua tâm I.

Do đó $C(-4;4)$

Kết luận: $A(2;0), B(-3;-1)$ và $C(-4;4)$ □

Bài 27. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC, có điểm $A(2;3)$, trọng tâm $G(2;0)$. Hai đỉnh B và C lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x+y+5=0$ và $d_2: x+2y-7=0$.*
Viết phương trình đường tròn có tâm C và tiếp xúc với đường thẳng BG.

Giải:



Ta có $B \in d_1$ nên $B(-y_B - 5; y_B)$, $C \in d_2 \Rightarrow C(-2y_C + 7; y_C)$
Vì G là trong tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_G \\ \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_B + 2y_C + 2 = 0 \\ y_B + y_C + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_B = -4 \\ y_C = 1 \end{cases}$$

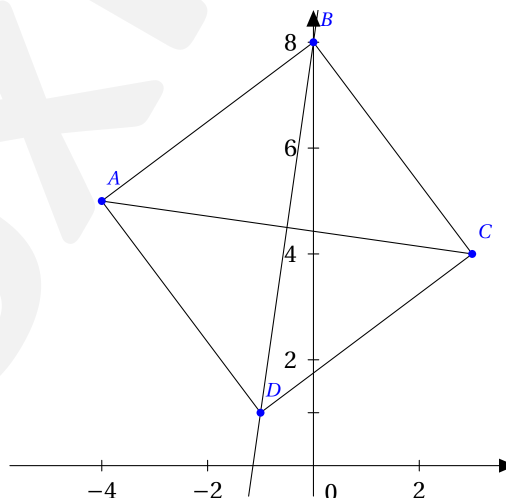
Do đó tọa độ $B(-1;-4), C(5;1)$
Ta có $\overrightarrow{BG}(3;4)$ nên vectơ pháp tuyến của BG là $\vec{n}_{BG} = (4;-3)$
Suy ra phương trình $BG : 4x - 3y - 8 = 0$
Bán kính của đường tròn tâm C tiếp xúc với $BG : 4x - 3y - 8 = 0$ là

$$R = \frac{|4.5 - 3.1 - 8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{5}$$

Kết luận: Phương trình đường tròn cần tìm $(x-5)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{81}{25}$ □

Bài 28. *Trong mặt phẳng* Oxy *Cho hình vuông ABCD điểm* $A(-4;5)$ *đường chéo có phương trình* $7x - y + 8 = 0$. *Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.*

<u>Giải:</u>



Do Tọa độ A không thỏa mãn phương trình đường chéo đã cho nên phương trinh đường chéo $BD : 7x - y + 8 = 0$

Mặt khác $BD \perp AC$ nên phương trình $AC: x + 7x + c = 0$

mà $A \in AC \Rightarrow -4 + 7.5 + c = 0 \Leftrightarrow c = -31$

Nên : $AC: x + 7y - 31 = 0$

Gọi $I = AC \cap BD$, tọa độ điểm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 7y - 31 = 0 \\ 7x - y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1}{2} \\ y = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{-1}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

Mà theo tính chất hình vuông, ta có I là trung điểm của AC nên:

$$\begin{cases} x_A + x_C = 2x_I \\ y_A + y_C = 2y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 4 \end{cases} \Rightarrow C(3;4)$$

Có $IB = ID = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{49+1} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

Do đó B, D thuộc đường tròn tâm I, Bán kính $R = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ có phương trình là:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

Do đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{9}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(7x + 8 - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 8 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$$

nên $B(0;8), D(-1;1)$

Kết luận: $A(-4;5), C(3;4), B(0;8), D(-1;1)$ □

Bài 29. *Cho đường tròn:* $\left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{32}{9}$ *và* $A(0;1); B\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.
Tìm M *thuộc* (C) *sao cho* $2MA + MB$ *min.*

Giải:

Phương pháp giải: Tìm điểm A' sao cho $2MA = MA'$ với mọi điểm M thuộc (C), sau đó áp dụng BĐT $MA' + MB \leqslant A'B$ để tìm M

Gọi điểm $M(x;y)$ thuộc $(C): x^2 + y^2 + \dfrac{4}{3}x - \dfrac{2}{3}y - 3 = 0 \quad (1)$

Tìm điểm A':

Cách 1: Gọi $A'(a;b)$ sao cho $2MA = MA'$, mọi điểm M thuộc (C)

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \Leftrightarrow 4(x^2 + y^2 - 2y + 1) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \dfrac{2ax}{3} + \dfrac{(2b-8)y}{3} + \dfrac{4 - a^2 - b^2}{3} = 0 \quad (2)$

Do M thoả mãn cả 2 phương trình (1) và (2) nên 2 phương trình này tương đương nhau

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{3} = \dfrac{2a}{3} \\ \dfrac{-2}{3} = \dfrac{2b-8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = 2; b = 3$ hay $A'(2;3)$

Cách 2: $M \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}y + 3 \quad (\star)$

Ta có:

$2MA = 2\sqrt{x^2 + (1-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 3x^2 + 3y^2 - 8y + 4} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13}$ (Thế từ $(\star)$ đó mà)

$\Leftrightarrow MA' = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \Rightarrow A'(2;3)$

• Do B nằm trong đường tròn, A' nằm ngoài đường tròn nên $2MA+MB = MA'+MB$ đạt GTNN khi và chỉ khi M, A', B thẳng hàng và M nằm giữa A', B □

Bài 30. *Trong mặt phẳng toạ độ đề-các vuông góc cho elip* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ *với* $a>b>0$ *A và B là 2 điểm tùy ý thuộc elip sao cho OA vuông góc với OB. Hãy xác định vị trí A, B trên elip để tam giác OAB có diên tích lớn nhất và nhỏ nhất. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó.*

Giải:

* TH_1: Xét A và B nằm trên 2 đường thẳng $x=0$ và $y=0$.

Dễ dàng tính được $S_{ABC} = \frac{3}{2}$ (1)

* TH_2: Xét A và B lần lượt nằm trên 2 đường vuông góc: và $y = \frac{-1}{k}x$

Tọa độ A thỏa mãn: $\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1 \\ y=kx \end{cases}$ Nên ta có: $\frac{{x_A}^2}{9}+\frac{{x_A}^2k^2}{1}=1 \Leftrightarrow {x_A}^2 = \frac{9}{1+9k^2}$

Do đó ${y_A}^2 = \frac{9k^2}{1+9k^2}$. Nên $OA^2 = {x_A}^2+{y_A}^2 = \frac{9k^2+9}{1+9k^2} \Leftrightarrow OA = \frac{3\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{1+9k^2}}$.

Tương tự: $OB = \frac{3\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{9+k^2}}$. Nên ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}$OA.OB $= \frac{1}{2}.\frac{3\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{1+9k^2}}.\frac{3\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{9+k^2}} = \frac{1}{2}.\frac{9(k^2+1)}{\sqrt{1+9k^2}.\sqrt{9+k^2}}$.

-Tìm Min: Áp dụng bất đẳng thức cosi cho 2 số dương $\sqrt{1+9k^2}$ và $\sqrt{9+k^2}$

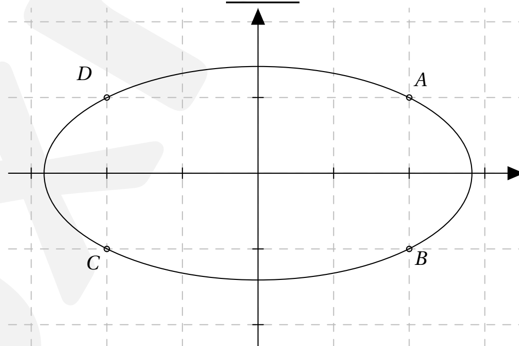
Ta có $2.\sqrt{1+9k^2}.\sqrt{9+k^2} \le 10(k^2+1)$ Do đó S $\ge \frac{9}{10}$. So sánh với (1) thì $S_{min} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow k^2 = 1$

-Tìm max: Áp dụng bất đẳng thức Bunhia ta có: $\sqrt{1+9k^2}.\sqrt{9+k^2} \ge 3(k^2+1)$

Do đó : S $\le \frac{3}{2}$. $\Leftrightarrow A, B$ là giao điểm của elip với các trục tọa độ.(hoán vị cho nhau) □

Bài 31. *Trong mặt phẳng Oxy cho elip* $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.*Viết phương trình đường thẳng* (d) *cắt* (E) *tại hai điểm phân biệt có toạ độ là các số nguyên.*

Giải:



$M(x;y)$ có tọa đô nguyên thuộc (E)

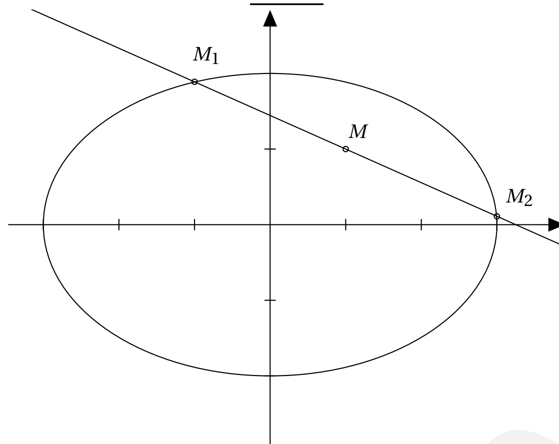
Suy ra $y^2 \le 2 \Rightarrow y \in \{-2;-1;0;1;2\}$

Thay y vào phương trình (E) và lấy nhưng giá trị x nguyên ta được các điểm thuộc (E) có tọa đô nguyên là $A(2;1), B(2;-1), C(-2;-1), D(-2;-1)$

Việc viết phương trình (d) chỉ là viết phương trình đường thẳng đi qua 2 trong 4 điểm trên. Đọc giả tự viết □

Bài 32. *Cho* $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$ *và* $M(1;1)$. *Lập phương trình đường thẳng qua* M *và cắt* (E) *tại* $M_1; M_2$ *sao cho* $MM_1 = MM_2$

Giải:



Ta có: (E): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Dễ thấy điểm M nằm bên trong (E)

Do đó đường thẳng d qua M luôn cắt (E) tại 2 điểm phân biệt M_1, M_2

Do điểm $M \notin Ox$ nên đường thẳng $x = 1$ đi qua M và song song với trục Oy cắt (E) tại 2 điểm M_1, M_2 thì $MM_1 \neq MM_2$

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d qua M. PT đường thẳng d có dạng: $y = kx + 1 - k$

Hoành độ x_{M_1} và x_{M_2} là nghiệm của PT:

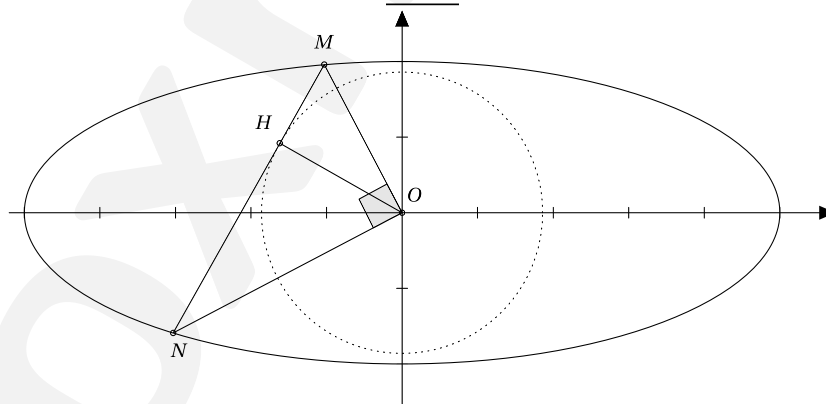
$4x^2 + 9(kx + 1 - k)^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (9k^2 + 4)x^2 - 18k(k-1)x + 9k^2 - 18k - 27 = 0$

Ta có: $x_{M_1} + x_{M_2} = 2x_M \Rightarrow S = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{18k(k-1)}{9k^2 + 4} = 2 \Leftrightarrow k = -\dfrac{4}{9}$

Vậy PT đường thẳng cần tìm: $4x + 9y - 13 = 0$ □

Bài 33. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho elip* $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. M *và* N *là 2 điểm trên* (E) *sao cho tam giác* OMN *vuông tại* O *(* O *là gốc tọa độ). Gọi* H *là hình chiếu của* O *trên* MN. *Tìm quỹ tích* H.

Giải:



$M(x_0; y_0): OM \perp ON \Rightarrow N(ky_0; -kx_0)$

$M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \dfrac{x_0^2}{25} + \dfrac{y_0^2}{4} = 1$

$N(ky_0; -kx_0) \in (E) \Rightarrow \dfrac{k^2 y_0^2}{25} + \dfrac{k^2 x_0^2}{4} = 1 \Rightarrow \dfrac{y_0^2}{25} + \dfrac{x_0^2}{4} = \dfrac{1}{k^2}$

$\Rightarrow \dfrac{x_0^2 + y_0^2}{25} + \dfrac{x_0^2 + y_0^2}{4} = 1 + \dfrac{1}{k^2} \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = \dfrac{100}{29}\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right)$

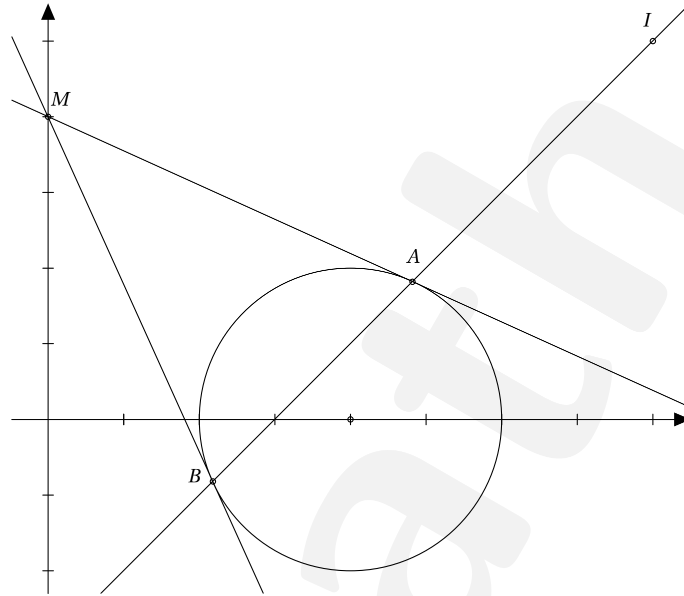
$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{x_0^2 + y_0^2} + \dfrac{1}{k^2 y_0^2 + k^2 x_0^2} = \dfrac{1}{x_0^2 + y_0^2}\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right) = \dfrac{29}{100}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{10}{\sqrt{29}} \Rightarrow {x_H}^2 + {y_H}^2 = \dfrac{100}{29}$

Kết luận: Quỹ tích điểm H là đường tròn tâm O bán kính R = $\dfrac{10}{\sqrt{29}}$ □

Bài 34. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): (x-4)^2 + y^2 = 4$ và điểm $I(8;5)$. Tìm điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là hai tiếp điểm) đồng thời đường thẳng AB đi qua I*

<u>Giải:</u>



Phương trình AB là giao của 2 đường tròn (C) và đường tròn đường kính KM với K là tâm đường tròn C. $K(4;0), M(0;a)$

Phương trình đường tròn đường kính KM có dạng:

$(x-2)^2 + (y - \dfrac{a}{2})^2 = 4 + \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - ay = 0$

Ta có hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - ay = 0 \end{cases}$$

Nên AB có PT là: $4x - ay - 12 = 0$ Vì AB đi qua $I(8;5)$ nên $M(0;4)$

Kết luận: $M(0;4)$ □

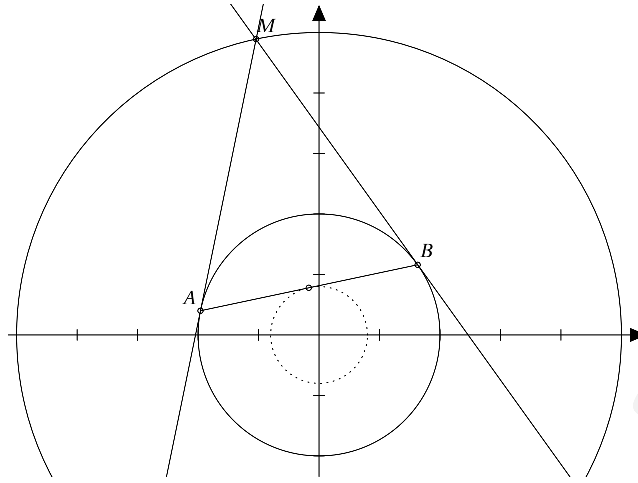
Bài 35. *Trong mặt phẳng Oxy Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 4$ và $(C_2): x^2 + y^2 = 25$. Từ điểm $M \in (C_2)$ kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C_1) (A, B là các tiếp điểm). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.*

<u>Giải:</u>

Ta có: $OM = R_2 = 5$, $OA = R_1 = 2 \Rightarrow OH = d_{(O;AB)} = \dfrac{OA^2}{OM} = \dfrac{4}{5}$

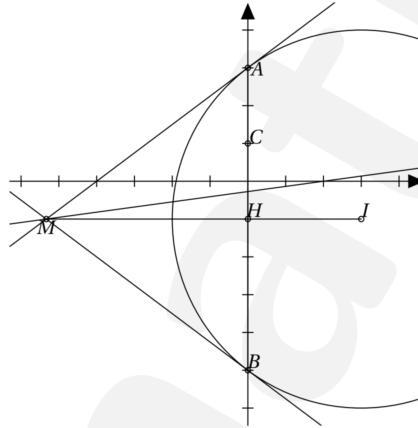
Khi điểm M chuyển động trên C_2 thì điểm O luôn cách đường thẳng AB một đoạn $OH = \dfrac{4}{5}$,

Nên đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn (C): $x^2 + y^2 = \dfrac{16}{25}$ □



Bài 36. *Trong mặt phẳng Oxy Trong mặt phẳng Oxy cho (C) : $x^2+y^2-6x+2y-15=0$ tìm M thuộc $d: 3x-22y-6=0$ sao cho từ M kẻ được đến (C) 2 tiếp tuyến MA, MB với A và B là các tiếp điểm. Và đường thẳng AB đi qua điểm $C(0;1)$*

Giải:



Gọi tọa độ M là $(x_M;y_M)$.(C) có tâm $I(3,-1)$. Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua $C(0;1)$ và nhận $\overrightarrow{IM}$ làm vecto pháp tuyến. Nên ta có phương trình đường thẳng AB là : $(\Delta):(x_M-3)x+(y_M+1)(y-1)=0$
Gọi H là giao điểm của IM và AB ta có :

$$IH=d(I;\Delta)=\frac{|3(x_M-3)-2(y_M+1)|}{\sqrt{(x_M-3)^2+(y_M+1)^2}}.\ IM=\sqrt{(x_M-3)^2+(y_M+1)^2}$$

Ta có $IH.IM=OA^2=R^2=25$. Nên $|3(x_M-3)-2(y_M+1)=25 \quad (1)$
Kết hợp với điều kiện M thuộc đường thẳng (d) nên ta có: $3x_M-22y_M-6=0 \quad (2)$
Từ $(1),(2)$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}|3(x_M-3)-2(y_M+1)|=25\\ 3x_M-22y_M-6=0\end{cases}$$

Giải ra tìm được $M\left(13;\frac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-16}{3};-1\right)$. Thử lại chỉ có $M\left(\frac{-16}{3};-1\right)$ thỏa đề bài

Kết luận: $M\left(\frac{-16}{3};-1\right)$ □

Bài 37. *Trong mặt phẳng Oxy Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có tâm I đi qua hai điểm $A(1;0),B(0;1)$ sao cho diện tích tam giác IAB bằng 9. Viết phương trình đường tròn (C)*

Giải:

Gọi E là trung điểm của AB. Ta tính được $AB=\sqrt{2}\Rightarrow EB=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$S_{AIB}=\frac{1}{2}AB.IE=EB.IE=9\Rightarrow IE=9\sqrt{2}$. $R=IB=\sqrt{IE^2+EB^2}=\frac{5\sqrt{26}}{2}$.

Để tìm tâm I thì ta có: $E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ (Vì E là trung điểm của AB).

Dễ dàng viết được phương trình của IE đi qua E và vuông góc với AB. là: $IE:\quad x-y=0$

Do đó ta gọi $I(a;a)\in IE$. Khi đó $IE=9\sqrt{2}\Rightarrow I\left(\frac{19}{2};\frac{19}{2}\right)$ hay $I\left(-\frac{17}{2};-\frac{17}{2}\right)$

Kết luận: Vậy có 2 pt đường tròn cần tìm! □

Bài 38. *Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có $M\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm của BC,AC và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\ y=2+\frac{4}{3}t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$.*
Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giải:

Đầu tiên ta có nhận xét sau: Cho góc xOy có đường thẳng Δ là phân giác của góc xOy. Khi đó với mỗi điểm $M\in Ox$ thì điểm đối xứng với M qua Δ sẽ thuộc Oy. Ta sẽ ứng dụng nhận xét trên vào bài toán.

Một điều nữa là đường thẳng: $\begin{cases}x=1\\ y=2+\frac{4}{3}t\end{cases}$ chỉ là cái hình thức thôi, thật ra nó chính là đường thẳng: $x=1$ thôi.

Ta gọi điểm P là điểm đối xứng với N qua đường thẳng d khi đó thì điểm $P\in AB$

Việc tìm một điểm đối xứng qua một đường thẳng là công việc khá đơn giản, và ở đây ta tìm được: $P\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{NM}=(1;1)$. Đường thẳng AB qua B và song song với đường thẳng MN nên ta dễ dàng viết được phương trình đường thẳng $AB: x-y+1=0$

Tới đây ta tìm được tọa độ các điểm là: $A(1;2);C(0;3);B(3;4)$

Việc viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ta, giác thì đơn giản rồi. □

Bài 39. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y=0$ và đường thẳng $(d): y=x+1$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) sao cho từ M kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn tại A và B, sao cho: $\widehat{AMB}=60^o$*

Giải:

Khi đọc xong bài toán ta ấn tượng với một điều rất quan trọng là: $\triangle MBC$ là tam giác đều (Vì $MA=MB$ và: $\widehat{AMB}=60^o$.) Không nói quá rằng đây là mấu chốt của bài toán.

Viết lại phương trình đường tròn dưới dạng:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=5$$

Đường tròn có tâm $I(-1;2)$ và bán kính: $R=\sqrt{5}$.

Ta luôn có tứ giác $IAMB$ nội tiếp đường tròn vì: $\widehat{MAB}=\widehat{MBA}=90^0$,

suy ra: $\widehat{AMB}+\widehat{AIB}=180^0\Rightarrow\widehat{AIB}=120^0$

Xét $\triangle ABC$, ta có:

$$AB^2=IA^2+IB^2-2IA.IB.\cos\widehat{AIB}=3R^2=15$$

Mặt khác: ΔMBC là tam giác đều nên: $MA=AB\Leftrightarrow MA^2=AB^2=15$.

Áp dụng định lí Pytago cho ΔMAI ta có:

$$MI^2=MA^2+AI^2=15+5=20$$

Do $M \in d$ nên tọa độ M có dạng: $(x_0; x_0+1)$
Khi đó ta có:

$$MI^2 = (x_0+1)^2 + (x_0-1)^2 = 20 \Leftrightarrow x_0^2 = 9 \Leftrightarrow x_0 = 3;\ \ x_0 = -3$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn điều kiện bài toán: $(3;4); (-3;-2)$
Kết luận: Vậy có 2 điểm M thỏa mãn điều kiện bài toán: $(3;4); (-3;-2)$ □

Bài 40. *Trong mặt phẳng Oxy Cho đương tròn (T):$x^2+y^2-2x-4y+4=0$ và đường thẳng (d) : $x-y-1=0$. Từ M thuộc d kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến (T) trong đó A, B là các tiếp điểm. Chứng minh đường thẳng qua A, B luôn đi qua điểm cố định*

Giải:

Phương trình đường tròn: $(x-1)^2+(y-2)^2=1$
Gọi tọa độ các điểm là: $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$; $M(x_0; y_0)$.
Ta có: Tiếp tuyến tại A, qua M của đường tròn có dạng:

$$(x_0-1)(x_1-1)+(y_0-2)(y_1-2)=1$$

Tiếp tuyến tại B, qua M của đường tròn có dạng:

$$(x_0-1)(x_2-1)+(y_0-2)(y_2-2)=1$$

Dễ thấy 2 điểm $A; B$ đều thỏa mãn phương trình đường thẳng: tiếp tuyến tại A, qua M của đường tròn có dạng:

$$(x_0-1)(x-1)+(y_0-2)(y-2)=1$$

Đó chính là phương trình đường thẳng AB.
Mà ta lại có: $M \in (d)$ nên: $M=(x_0; y_0)=(x_0; x_0-1)$. Thay lên phương trình trên ta được:

$$(x_0-1)(x-1)+(x_0-3)(y-2)=1$$

Gọi $N(x; y)$ là điểm cố định mà AB luôn đi qua với mọi x_0.
Khi đó phương trình: $(x_0-1)(x-1)+(x_0-3)(y-2)=1$ có nghiệm với mọi x_0.
Hay là: $x_0(x+y-3)+6-x-3y=0$ có nghiệm với mọi x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3=0 \\ 6-x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{3}{2}$$

Vậy điểm cố định cần tìm là: $N\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ □

Bài 41. *Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=4$ và $(C'): x^2+y^2=9$. Viết phương trình đường tròn tâm I tiếp xúc với cả hai đường tròn (C) và (C') biết rằng I thuộc đường thẳng $d: x+y-2=0$.*

Giải:

Bài toán này trước tiên ta cần phải lưu tâm đến vị trí của hai đường tròn bài toán cho các bạn à.
Cụ thể Đối với đường tròn (C) ta có tâm $I_1(1;2)$ và bán kính $R_1=2$
Đối với đường tròn (C') ta có tâm $I_2(0;0)$ và bán kính $R_2=3$. Từ đó ta có $I_1I_2=\sqrt{5}$ nên ta suy ra được $|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2$.
Do đó hai đường tròn (C) và (C') cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
Mặt khác đường thẳng d lại nằm giữa khoảng không gian giữa hai đường tròn nên đường tròn cần lập nếu có tiếp xúc với (C) và (C') thì có hai khả năng là tiếp xúc ngoài với (C) và (C') hoặc tiếp xúc trong với (C) và tiếp xúc trong với (C')
Từ đó ta có $I \in d: x+y-2=0 \Rightarrow I(x, 2-x)$ và gọi R là bán kính của đường tròn cần tìm.
+ Trường hợp 1 : Vì đường tròn cần tìm tiếp xúc ngoài cả (C) và (C') nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} R + R_1 = II_1 & (1) \\ R + R_2 = II_2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) – (2) vế theo vế ta được phương trình

$$R_1 - R_2 = II_1 - II_2 \quad (3)$$

+ Trường hợp 2 : Vì đường tròn cần tìm tiếp xúc trong với (C) và cũng tiếp xúc trong với (C') nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} II_1 = R_1 - R & (4) \\ II_2 = R_2 - R & (5) \end{cases}$$

Lấy (4) – (5) vế theo vế ta có phương trình $\quad II_1 - II_2 = R_1 - R_2 \quad (6)$

Do (3) và (6) nên ta dẫn đến giải phương trình

$$\sqrt{(x-1)^2 + x^2} - \sqrt{x^2 + (2-x)^2} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 4x + 4} - 1$$

Bình phương hai vế phương trình này và thu gọn ta được phương trình

$$\sqrt{2x^2 - 4x + 4} = 2 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3x \geq 0 \\ 2x^2 - 4x + 4 = (2 - 3x)^2 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

+ Với $x = 0$ thì ta có $II_1 = 1$

nên từ (1) ta có $R = 1 - 2 = -1$ (vô lý)

+ Với $x = 0$ thì ta có $II_1 = 1$ nên từ (4) ta có $R = 2 - 1 = 1$ (nhận)

Do đó phương trình đường tròn cần tìm là : $x^2 + (y-2)^2 = 1$ □

BÀI TẬP ÔN LUYỆN CÓ ĐÁP SỐ

1 Bài tập Điểm - Đường thẳng

Bài 1. *Trong mặt phẳng* Oxy *chứng minh rằng với mọi số thực* m *phương trình :* $mx^2 - m^2x + (m-1)xy + my - y^2 = 0$ *là phương trình của đường thẳng.*

ĐS : $mx - y = 0, x + y - m = 0$

Bài 2. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho* ΔABC *có đỉnh A(1;2), đường trung tuyến BM:* $2x + y + 1 = 0$ *và phân giác trong* $CD : x + y - 1 = 0$ *Viết phương trình đường thẳng* BC.

ĐS : $4x + 3y + 4 = 0$

Bài 3. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho hình bình hành* $ABCD$ *có diện tích bằng 4. Biết* $A(1;0), B(0;2)$ *và giao điểm* I *của hai đường chéo nằm trên đường thẳng* $y = x$. *Tìm tọa độ đỉnh* C *và* D.

ĐS : $C\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$ hoặc $C(-1;0), D(0;-2)$

Bài 4. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho 2 đường thẳng:* $d_1 : 2x - y - 1 = 0, d_2 : 2x + y - 3 = 0$. *Gọi* I *là giao điểm của 2 đường thẳng* d_1 *và* d_2*;* A *là điểm thuộc* d_1*,* A *có hoành độ dương khác 1* $(0 < x_A \neq 1)$. *Lập phương trình đường thẳng* (Δ) *đi qua* A*, cắt* d_2 *tại* B *sao cho diện tích* $\triangle IAB$ *bằng 6 và* $IB = 3IA$.

ĐS : $x + y - 5 = 0, \quad 4x + y - 11 = 0$

Bài 5. *Trong mặt phẳng tọa độ* Oxy *cho tam giác* ABC *có trung điểm cạnh* AB *là* $M(-1;2)$*, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là* $I(2;-1)$. *Đường cao của tam giác kẻ từ* A *có phương trình:* $2x + y + 1 = 0$. *Tìm tọa độ đỉnh* C.

ĐS : $C\left(\frac{14}{15};\frac{47}{15}\right)$

Bài 6. *Trong mặt phẳng tọa độ* Oxy *cho tam giác* ABC *có* $B(-12;1)$*, đường phân giác trong góc* A *có phương trình:* $x + 2y - 5 = 0$. *Trọng tâm tam giác* ABC *là* $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$*.Viết phương trình đường thẳng* BC

ĐS : $BC : x - 8y + 20 = 0$

Bài 7. *Trong mặt phẳng tọa độ* Oxy. *Lập phương trình đường thẳng qua* $M(2;1)$ *và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng* 4.

ĐS : $x + 2y - 4 = 0$

Bài 8. *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ* Oxy*, lập phương trình đường thẳng* d *đi qua điểm* $A(1;2)$ *và cắt đường tròn* (C) *có phương trình* $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ *theo một dây cung có độ dài bằng 8*

ĐS : $d : 3x - 4y + 5 = 0$

Bài 9. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho* $A(1;4)$ *và hai đường thẳng* $b : x + y - 3 = 0; c : x + y - 9 = 0$. *Tìm điểm* B *trên* b *, điểm* C *trên* c *sao cho tam giác* ABC *vuông cân tại* A *.*

ĐS : $B(2;1), C(4;5)$ hoặc $B(-2;5), C(2;7)$.

Bài 10. *Phương trình hai cạnh của một tam giác trong mặt phẳng tọa độ là* $5x-2y+6=0; 4x+7y-21=0$. *viết phương trình cạnh thứ ba của tam giác đó, biết rằng trực tâm của nó trùng gốc tọa độ* O.

ĐS : $y+7=0$

Bài 11. *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy. *Lập phương trình đường thẳng đi qua* $A(8;6)$ *và tạo với 2 trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 12.*

ĐS : $3x-2y-6=0, \quad 3x-8y+24=0$

Bài 12. *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy *viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật* $ABCD$ *.Biết rằng* $AB=2BC$ *,* A, B *thuộc đường thẳng đi qua* $M\left(-\frac{4}{3};1\right)$, B, C *thuộc đường thẳng đi qua* $N(0;3)$, A, D *thuộc đường thẳng đi qua* $P\left(4;-\frac{1}{3}\right)$, C, D *thuộc đường thẳng đi qua* $Q(6;2)$.

ĐS : Với $k=1/3$ $AB: y=\frac{1}{3}(x+\frac{4}{3})+1, \quad DC: y=\frac{1}{3}(x-6)+2, \quad BC: x+\frac{1}{3}y-1=0, \quad AD: x+\frac{1}{3}y-\frac{35}{9}=0$

Với $k=-3/17$

$AB: y=-\frac{3}{17}(x+\frac{4}{3})+1, \quad DC: y=-\frac{3}{17}(x-6)+2, \; BC: x-\frac{3}{17}y+\frac{9}{17}=0, \quad AD: x-\frac{3}{17}y-4-\frac{3}{17}=0$

Bài 13. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho hình tam giác* ABC *có diện tích bằng 2. Biết* $A(1;0), B(0;2)$ *và trung điểm* I *của* AC *nằm trên đường thẳng* $y=x$. *Tìm toạ độ đỉnh* C.

ĐS : $C(-1;0)$ hoặc $C(\frac{5}{3};\frac{8}{3})$

Bài 14. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *,với* $A(1;1), B(-2;5)$, *đỉnh* C *nằm trên đường thẳng* $x-4=0$, *và trọng tâm* G *của tam giác nằm trên đường thẳng* $2x-3y+6=0$. *Tính diện tích tam giác* ABC.

ĐS : $S_{ABC}=\frac{15}{2}$

Bài 15. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *,với* $A(2;-1), B(1;-2)$, *trọng tâm* G *của tam giác nằm trên đường thẳng* $x+y-2=0$. *Tìm tọa độ điểm* C *biết diện tích tam giác* ABC *bằng 13,5.*

ĐS : $C=(-12;18)$ hoặc $C=(15;-9)$

Bài 16. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho* $\triangle ABC$ *có* $A(2;1)$ *. Đường cao qua đỉnh* B *có phương trình* $x-3y-7=0$ *.Đường trung tuyến qua đỉnh* C *có phương trình* $x+y+1=0$ *. Xác định tọa độ* B *và* C *. Tính diện tích* $\triangle ABC$.

ĐS : $S_{ABC}=16$

Bài 17. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ* Oxy *, cho tam giác* ABC *biết* $A(5;2)$. *Phương trình đường trung trực cạnh* BC, *đường trung tuyến* CC' *lần lượt là* $x+y-6=0$ *và* $2x-y+3=0$. *Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác* ABC

ĐS :

Bài 18. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ* Oxy *cho điểm* $A(-2;1)$ *và hai đường thẳng* $\Delta: x+3y+8=0$, $\Delta': 3x-4y+10=0$ *. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng* Δ, *đi qua điểm* A *và tiếp xúc với đường thẳng* Δ'.

ĐS : $(x-1)^2+(y+3)^2=25$

Bài 19. *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ* Oxy, *hãy viết phương trình các cạnh của tam giác* ABC *biết trực tâm* $H(1;0)$, *chân đường cao hạ từ đỉnh* B *là* $K(0;\ 2)$, *trung điểm cạnh* AB *là* $M(3;\ 1)$.

ĐS : $AC: x-2y+4=0, AB: 3x-y-8=0, BC: 3x+4y+2=0.$

Bài 20. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *với* $A(1;-2)$*, đường cao* $CH: x-y+1=0$*, phân giác trong* $BN: 2x+y+5=0$*. Tìm toạ độ các đỉnh* B, C *và tính diện tích tam giác* ABC *.*

ĐS : $S_{ABC} = \frac{45}{4}$

Bài 21. *Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ* Oxy *cho hình chữ nhật* $ABCD$ *có diện tích bằng 12, tâm* I *là giao điểm của đường thẳng* $d_1: x-y-3=0$ *và* $d_2: x+y-6=0$*. Trung điểm của một cạnh là giao điểm của* d_1 *với trục* Ox*. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.*

ĐS : $A(2;1), B(5;4), C(7;2), D(4;-1)$

Bài 22. *Trong mặt phẳng tọa độ* Oxy *cho hình chữ nhật* $ABCD$ *có tâm* $I = \left(\frac{1}{2};0\right)$*. Đường thẳng* AB *có phương trình: x - 2y + 2 = 0, AB = 2AD và hoành độ điểm* A *âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đó.*

ĐS : $C(3;0), D(-1;-2)$

Bài 23. *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ* Oxy *cho điểm* $C(2;-5)$ *và đường thẳng* $\Delta: 3x-4y+4=0$*. Tìm trên* Δ *hai điểm* A *và* B *đối xứng nhau qua* $I(2;5/2)$ *sao cho diện tích tam giác* ABC *bằng 15.*

ĐS : $A(0;1)$ và $B(4;4)$.

Bài 24. *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy *cho hai đường thẳng* $(d_1): 4x-3y-12=0$ *và* $(d_2): 4x+3y-12=0$*. Tìm toạ độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có 3 cạnh nằm trên* $(d_1), (d_2)$*, trục* Oy*.*

ĐS : $I(4/3;0), R = 4/3$

Bài 25. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *có trọng tâm* $G(2,0)$ *biết phương trình các cạnh* AB, AC *theo thứ tự là* $4x+y+14=0; 2x+5y-2=0$*. Tìm tọa độ các đỉnh* A, B, C*.*

ĐS : $A(-4,2), B(-3,-2), C(1,0)$

Bài 26. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho hình thoi có một đường chéo có phương trình:* $x+2y-7=0$*, một cạnh có phương trình:* $x+3y-3=0$*. Một đỉnh là* $(0;1)$*. Viết phương trình 3 cạnh và đường chéo thứ 2 của hình thoi.*

ĐS : $AD: 9x+13y-13=0$ và $BC: 9x+13y-83=0$

Bài 27. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho 2 điểm* $M(1;4)$ *và* $N(6;2)$*. Lập phương trình đường thẳng qua* N *sao cho khoảng cách từ* M *tới đó bằng* 2*.*

ĐS : $\Delta': y = 2$ hoặc $20x+21y-162=0$.

Bài 28. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho điểm* $M(3;1)$*. Viết phương trình đường thẳng qua* M *và cắt 2 trục tọa độ* Ox, Oy *tương ứng tại* A *và* B *sao cho* $OA+OB$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

ĐS : PT $\left(1+\sqrt{3}\right)x + \left(3+\sqrt{3}\right)y - 6 - 4\sqrt{3} = 0$

Bài 29. *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ* Oxy *cho tam giác* ABC *với* $A(1;2)$*, đường trung tuyến* BM *và đường phân giác trong* CD *có phương trình lần lượt là:* $2x+y+1=0$ *và* $x+y-1=0$*. Viết phương trình đường thẳng* BC*.*

ĐS : $BC: 4(x+1)+3y=0$ hay $4x+3y+4=0$

Bài 30. *Trong mặt phẳng với hệ trục* Oxy *cho đường thẳng* d *có phương trình:* $2x+3y+1=0$ *và điểm* $M(1;1)$*. Viết phương trình đường thẳng đi qua* M *tạo với* d *một góc* 45^o

ĐS : $(d): x-5y+4=0$ hay $5x+y-6=0$

Bài 31. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;0)$ và 2 đường thẳng lần lượt chứa đường cao kẽ từ B và C có phương trình: $x-2y+1=0; 3x+y+1=0$. Tính diện tích tam giác ABC*

ĐS : $S_{ABC}=28$

Bài 32. *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $AB=AC$, góc $BAC=90^o$. Biết $M(1;-1)$ là trung điểm của BC và $G(2/3;0)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh ABC.*

ĐS : $B(4;0); C(-2;-2)$hoặc $B(-2;-2); C(4;0)$.

Bài 33. *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân đỉnh A. Có trọng tâm là $G(4/3;1/3)$, Phương trình đường thẳng BC là: $x-2y-4=0$, phương trình đường thẳng BG là: $7x-4y-8=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C.*

ĐS : $B(0;-2); A(0;3); C(4;0)$

Bài 34. *Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật có tâm $I(1/2;0)$. Phương trình đường thẳng AB là: $x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C,D. Biết rằng A có hoành độ âm*

ĐS : $A(-2;2); D(-1;-2); C(3;0); B(2;2)$

Bài 35. *Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x-2y+2=0$. Tìm trên d hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông ở B và $AB=2BC$.*

ĐS : $C(0;1)$ hoặc $C(4/5;7/5)$

Bài 36. *Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có $A(5;3)$; $B(-1;2)$; $C(-4;5)$ viết phương trình đường thẳng đi qua A và chia tam giác ABC thành 2 phần có tỉ số diện tích bằng nhau.*

ĐS : $d: y-3=0$ hay $d: x+8y-29=0$

Bài 37. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC nhọn, viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AC biết tọa độ chân các đường cao hạ từ A,B,C lần lượt là: $A'(-1;-2), B'(2;2), C(-1;2)$.*

ĐS : $4x-3y-2=0$

Bài 38. *Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $A(3;0)$ và $C(-4;1)$ đối diện. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại?*

ĐS : $B(-1;-3)$ hoặc $B(0;4)$ từ đó suy ra D

Bài 39. *Trong mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng $d: 2x-y-5=0$ và 2 điểm $A(1;2), B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d và đi qua A,B.*

ĐS :

Bài 40. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: 4x+3y-43=0$ và điểm $A(7;5)$ trên d. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với d tại A và có tâm nằm trên đường thẳng: $\Delta: 2x-5y+4=0$*

ĐS :

Bài 41. *Trong mặt phẳng Oxy cho 2 đường thẳng: $d_1: 3x+4y-47=0$ và $d_2: 4x+3y-45=0$ Lập phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $d: 5x+3y-22=0$ và tiếp xúc với cả d_1 và d_2*

ĐS :

Bài 42. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0;2)$ và $B(-\sqrt{3};-1)$. Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB.*

ĐS : Trực tâm $H(\sqrt{3};-1)$, Tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-\sqrt{3};1)$.

Bài 43. *Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x-y+2=0, d_2: 2x+y-5=0$ và điểm $M(-1;4)$. Viết phương trình đường thẳng d cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.*

ĐS : $x=-1$

Bài 44. *Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông $ABCD$ tâm $I(2;-3)$, phương trình cạnh $AB: 3x+4y-4=0$. Tính độ dài cạnh hình vuông. Tìm phương trình cạnh CD, AD và BC.*

ĐS : $a=4; CD: 3x+4y+8=0, AD, BC: 4x-3y-7=0, 4x-3y-27=0$.

Bài 45. *Cho tam giác ABC có 3 cạnh nằm trên 3 đường thẳng $AB: 2x-y+2=0, BC: x-2y-5=0, CA: 2x+y-10=0$. Tính chiều cao AH của tam giác. Viết phương trình đường phân giác trong góc B và tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

ĐS : $A(2;6), AH=3\sqrt{5}$. Phân giác trong góc $B: x-y-1=0$, góc $C: x+3y-5=0$. Tâm $I(2;1)$.

Bài 46. *Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(3;2)$ cắt tia Ox tại A, tia Oy tại B sao cho:*
a) $OA+OB=12$;
b) (d) hợp với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích là 12.

ĐS : a) $x+3y-9=0$ hoặc $2x+y-8=0$. b) $2x+3y-12=0$.

Bài 47. *Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: 2x-y+1=0, d_2: x-2y-3=0$, đồng thời chắn trên hai trục tọa độ những đoạn bằng nhau.*

ĐS : $x+y+4=0, 3x-3y-2=0, 7x-5y=0$

Bài 48. *Cho tam giác ABC có $A(2;-1)$ và phương trình các đường cao là: $2x-y+1=0; 3x+y+2=0$. Lập phương trình trung tuyến của tam giác qua đỉnh A.*

ĐS : $B\left(-\frac{8}{5};-\frac{11}{5}\right); C(4;2); AM: 11x-8y-30=0$..

Bài 49. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $C(-2;-4)$ và trọng tâm $G(0;4)$.*
a) Giả sử $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh BC. Xác định tọa độ các đỉnh A và B.
b) Giả sử M di động trên đường thẳng $(D): x+y-2=0$, tìm quỹ tích của điểm B. Xác định M để độ dài AB là ngắn nhất.

ĐS : a) $A(-4;12), B(6;4)$. b) Quỹ tích $B: x+y-10=0. B\left(\frac{3}{2};\frac{17}{2}\right); \quad M\left(-\frac{1}{4};\frac{9}{4}\right)$.

Bài 50. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết $C(4;3)$, đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh của tam giác có phương trình lần lượt là: $x+2y-5=0$ và $4x+13y-10=0$. Viết phương trình ba cạnh của tam giác ABC.*

ĐS : $BC: x+y-7=0. AB: x+7y+5=0. AC: x-8y+20=0$.

Bài 51. *Trong mặt phẳng Oxy lập phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua $I(-2;3)$ và cách đều $A(5;-1)$ và $B(3;7)$.*

ĐS : $4x+y+5=0$ hay $y-3=0$.

Bài 52. *Trong mặt phẳng* Oxy *Tìm tọa độ điểm* M' *đối xứng với* $M(1;2)$ *qua đường thẳng có phương trình* $3x+4y-1=0$.

ĐS : $M'\left(-\frac{7}{5};-\frac{6}{5}\right)$

Bài 53. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *biết* $A(1;3)$, *pt hai đường trung tuyến kẻ từ* B *và* C *tương ứng là:* $x-2y+1=0$ *và* $y-1=0$. *Tìm tọa độ trực tâm* H *của tam giác* ABC.

ĐS : $H\left(\frac{1}{3};\frac{17}{3}\right)$

Bài 54. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *biết* $A(2;-1)$, *pt hai đường phân giác trong kẻ từ* B *và* C *tương ứng là:* $x-2y+1=0$ *và* $x+y+3=0$. *Lập pt cạnh* BC *và tìm tọa độ* B,C.

ĐS : $BC: 4x-y+3=0, B\left(-\frac{5}{7};\frac{1}{7}\right), C\left(-\frac{6}{5};-\frac{9}{5}\right)$.

Bài 55. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho* $d_1: x+y+3=0, d_2: x-y-4=0, d_3: x-2y=0$. *Tìm tọa độ điểm* M *nằm trên* d_3 *sao cho khoảng cách từ* M *đến đt* d_1 *bằng 2 lần khoảng cách từ* M *đến đt* d_2.

ĐS : $M(2;1)$ hoặc $M(-22;-11)$

Bài 56. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho* $A(1;1), B(4;-3)$. *Tìm điểm* C *thuộc* $(d): x-2y-1=0$ *sao cho* $d(C,AB)=6$.

ĐS : $C(7;3)$ hoặc $C\left(-\frac{43}{11};-\frac{27}{11}\right)$.

Bài 57. *Trong mặt phẳng* Oxy *lập pt đt đi qua điểm* $A(3;2)$ *và tạo với trục hoành góc* 60^o.

ĐS : $\sqrt{3}x \pm y \mp 2-3\sqrt{3}=0$

Bài 58. *Trong mặt phẳng* Oxy *lập pttq của đường thẳng đi qua điểm* $M(1;3)$ *và chắn trên các trục tọa độ những đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.*

ĐS : $x+y-4=0$ hay $x-y+2=0$

Bài 59. *Trong mặt phẳng* Oxy *Lập pt TQ của đt đi qua điểm M(1; 2) và chắn trên các trục tọa độ những đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.*

ĐS : $x+y-3=0$ hay $x-y+1=0$

Bài 60. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *biết* $A(1;1)$, *pt các đường cao kẻ từ* B *và* C *tương ứng là:* $-2x+y-8=0$ *và* $2x+3y-6=0$. *Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác* ABC.

ĐS : $I(-\frac{43}{8};-\frac{57}{4})$

Bài 61. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *biết* $AB: 5x-3y+2=0$, *pt các đường cao kẻ từ* A *và* B *tương ứng là:* $4x-3y+1=0$ *và* $7x+2y-22=0$. *Lập pt 2 cạnh* AC, BC *và đường cao thứ 3.*

ĐS : $BC: 3x+4y-22=0, AC: 2x-7y-5=0, CH: 3x+5y-23=0$

Bài 62. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho hình vuông* $ABCD$. *Gọi* M *là trung điểm của cạnh* BC, N *là điểm trên cạnh* CD *sao cho* $CN=2ND$. *Giả sử* $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ *và đường thẳng* AN *có phương trình* $2x-y-3=0$. *Tìm tọa độ điểm* A

ĐS : $A(1;-1)$ hoặc $A(4;5)$

Bài 63. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$ .Gọi I là tâm của (C), M thuộc Δ. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C)(A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10*

ĐS : $M(2;-4)$ hoặc $M(-3;1)$

Bài 64. *Trong mặt phẳng Oxy cho 2 đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$ và $d: 2x-y-2=0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thỏa mãn $OM.ON=8$*

ĐS : $N(0;-2)$ hoặc $N\left(\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)$

Bài 65. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $B\left(\frac{1}{2};1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB tương ứng các điểm D, E, F. Cho $D(3;1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y-3=0$. Tìm tọa độ A, biết A có tung độ dương.*

ĐS : $A\left(3;\frac{13}{3}\right)$

Bài 66. *Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x+y=0$ và $d_2: \sqrt{3}x-y=0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.*

ĐS : $(T): \left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1$

Bài 67. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6;6)$; đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x+y-4=0$. Tìm toạ độ các đỉnh B và C, biết điểm $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho*

ĐS : $B(0;-4)$ và $C(-4;0)$ hoặc $B(-6;2)$ và $C(2;-6)$

Bài 68. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.*

ĐS : $BC: 3x-4y+16=0$

Bài 69. *Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.*

ĐS : $AB: y-5=0$ hoặc $x-4y+19=0$

Bài 70. *Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$. Đường thẳng AB có phương trình: $x-2y+2=0$, $AB=2AD$ và hoành độ điểm A âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đó.*

ĐS :

Bài 71. *Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(1;0)$, $B(-2;4)$, $C(-1;4)$, $D(3;5)$ và đường thẳng $d: 3x-y-5=0$. Tìm điểm M trên d sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.*

ĐS :

Bài 72. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho hình tam giác* ABC *có diện tích bằng 2. Biết* $A(1;0), B(0;2)$ *và trung điểm* I *của* AC *nằm trên đường thẳng* $y = x$*. Tìm toạ độ đỉnh* C*.*

ĐS :

Bài 73. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC*, với* $A(1;1), B(-2;5)$*, đỉnh* C *nằm trên đường thẳng* $x - 4 = 0$*, và trọng tâm* G *của tam giác nằm trên đường thẳng* $2x - 3y + 6 = 0$*. Tính diện tích tam giác* ABC*.*

ĐS :

Bài 74. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC*, với* $A(2;-1), B(1;-2)$*, trọng tâm* G *của tam giác nằm trên đường thẳng* $x + y - 2 = 0$*. Tìm tọa độ đỉnh* C *biết diện tích tam giác* ABC *bằng 13,5 .*

ĐS :

Bài 75. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho* $\triangle ABC$ *có* $A(2;1)$ *. Đường cao qua đỉnh* B *có phương trình* $x - 3y - 7 = 0$ *. Đường trung tuyến qua đỉnh* C *có phương trình* $x + y + 1 = 0$ *. Xác định tọa độ* B *và* C *. Tính diện tích* $\triangle ABC$*.*

ĐS :

Bài 76. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *biết* $A(5;2)$*. Phương trình đường trung trực cạnh* BC*, đường trung tuyến* CC' *lần lượt là* $x + y - 6 = 0$ *và* $2x - y + 3 = 0$*. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác* ABC*.*

ĐS :

Bài 77. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho hai đường thẳng* $\Delta: x + 3y + 8 = 0$*,* $\Delta' : 3x - 4y + 10 = 0$ *và điểm* $A(-2;1)$*. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng* Δ*, đi qua điểm* A *và tiếp xúc với đường thẳng* Δ'*.*

ĐS :

Bài 78. *Trong mặt phẳng* Oxy *viết phương trình các cạnh của tam giác* ABC *biết trực tâm* $H(1;0)$*, chân đường cao hạ từ đỉnh* B *là* $K(0;\ 2)$*, trung điểm cạnh* AB *là* $M(3;\ 1)$*.*

ĐS :

Bài 79. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho hình chữ nhật* $ABCD$ *có phương trình đường thẳng* $AB : x - 2y + 1 = 0$*, phương trình đường thẳng* $BD : x - 7y + 14 = 0$*, đường thẳng* AC *đi qua* $M(2;1)$*. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.*

ĐS :

Bài 80. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC*, có điểm* $A(2;3)$*, trọng tâm* $G(2;0)$*. Hai đỉnh* B *và* C *lần lượt nằm trên hai đường thẳng* $d_1 : x + y + 5 = 0$ *và* $d_2 : x + 2y - 7 = 0$*. Viết phương trình đường tròn có tâm* C *và tiếp xúc với đường thẳng* BG*.*

ĐS :

Bài 81. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác cân* ABC *có đáy* BC *nằm trên đường thẳng :* $2x - 5y + 1 = 0$*, cạnh bên* AB *nằm trên đường thẳng :* $12x - y - 23 = 0$ *. Viết phương trình đường thẳng* AC *biết rằng nó đi qua điểm* $(3;1)$

ĐS :

Bài 82. *Trong mặt phẳng* Oxy *viết phương trình các cạnh của tam giác* ABC *biết* $B(2;-1)$*, đường cao và đường phân giác trong qua đỉnh* A, C *lần lượt là :* $(d_1) : 3x - 4y + 27 = 0$ *và* $(d_2) : x + 2y - 5 = 0$

ĐS :

Bài 83. *Trong mặt phẳng Oxy xét tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là : $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 2 . Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .*

ĐS :

Bài 84. *Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(1;1)$ và đường thẳng $\Delta : 2x+3y+4=0$. Tìm tọa độ điểm B thuộc đường thẳng Δ sao cho đường thẳng AB và Δ hợp với nhau góc 45^o.*

ĐS :

Bài 85. *Trong mặt phẳng Oxy cho cho hai đường thẳng $d_1 : 2x - y + 5 = 0$. $d_2 : 3x + 6y - 7 = 0$. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $P(2;-1)$ sao cho đường thẳng đó cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2.*

ĐS :

Bài 86. *Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB : x - 2y - 1 = 0$, đường chéo $BD : x - 7y + 14 = 0$ và đường chéo AC đi qua điểm $M(2;1)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.*

ĐS :

Bài 87. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng (Δ) có phương trình: $x - 2y - 2 = 0$ và hai điểm $A(-1;2); B(3;4)$. Tìm điểm $M \in (\Delta)$ sao cho $2MA^2 + MB^2$ có giá trị nhỏ nhất.*

ĐS :

Bài 88. *Trong mặt phẳng Oxy Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(2;4)$*
a) Viết phương trình đường thẳng đi qua M cắt đường tròn tại 2 điểm A và B, sao cho M là trung điểm của AB.
b) Viết phương trình các tiếp tuyến của đường tròn, biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -1$.

ĐS :

Bài 89. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB : x - y - 2 = 0$, phương trình cạnh $AC : x + 2y - 5 = 0$. Biết trọng tâm của tam giác $G(3;2)$. Viết phương trình cạnh BC.*

ĐS :

Bài 90. *Trong mặt phẳng Oxy viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(2;5), B(4;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng có phương trình $3x - y + 9 = 0$.*

ĐS :

Bài 91. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-2,0)$ biết phương trình các cạnh AB, AC theo thứ tự là $4x + y + 14 = 0; 2x + 5y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.*

ĐS :

Bài 92. *Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $(d_1) : 4x - 3y - 12 = 0$ và $(d_2) : 4x + 3y - 12 = 0$. Tìm toạ độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có 3 cạnh nằm trên $(d_1), (d_2)$, trục Oy.*

ĐS :

Bài 93. *Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $C(2;-5)$ và đường thẳng $\Delta : 3x - 4y + 4 = 0$. Tìm trên Δ hai điểm A và B đối xứng nhau qua $I(2;5/2)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 15.*

ĐS :

Bài 94. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A(1;-2)$, đường cao $CH : x - y + 1 = 0$, phân giác trong $BN : 2x + y + 5 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh B, C và tính diện tích tam giác ABC*

ĐS :

Bài 95. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho hình chữ nhật* $ABCD$ *có diện tích bằng 12, tâm* I *là giao điểm của đường thẳng* $d_1 : x - y - 3 = 0$ *và* $d_2 : x + y - 6 = 0$. *Trung điểm của một cạnh là giao điểm của* d_1 *với trục* Ox. *Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.*

ĐS :

Bài 96. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *có* $A(4;-1), B(1;5)C(-4,-5)$. *Viết phương trình các đường thẳng sau:*

a) *Đường cao* AH

b) *Các đường trung tuyến* BB_1, CC_1

c) *Các đường phân giác trong* BB_2, CC_2.

ĐS : $AH : x + 2y - 2 = 0$

$BB_1 : 8x - y - 3 = 0, CC_1 : 14x - 13y - 9 = 0$

$BB_2 : x - 1 = 0, CC_2 : x - y - 1 = 0$

Bài 97. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *có* $A(4;-1)$ *và phương trình hai đường trung tuyến* $BB_1 : 8x - y - 3 = 0, CC_1 : 14x - 13y - 9 = 0$. *tìm tọa độ các đỉnh* B, C.

ĐS : $B(1;5), C(-4;-5)$.

Bài 98. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *có* $C(-4,-5)$ *và phương trình đường cao* $AH :$ $x + 2y - 2 = 0$, *đường trung tuyến* $BB_1 : 8x - y - 3 = 0$. *Tìm tọa độ các đỉnh* A, B.

ĐS : $B(1;5), A(4;-1)$.

Bài 99. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *có* $B(1;5)$ *và phương trình đường cao* $AH :$ $x + 2y - 2 = 0$, *đường phân giác* $CC_2 : x - y - 1 = 0$. *Tìm tọa độ các đỉnh* A, C.

ĐS : $A(4;-1), C(-4;-5)$.

Bài 100. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *có* $A(4;-1)$ *và phương trình đường trung tuyến* $BB_1 : 8x - y - 3 = 0$, *phương trình phân giác* $CC_2 : x - y - 1 = 0$. *Tìm tọa độ* B, C.

ĐS : $B(1;5), C(-4;-5)$.

Bài 101. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *có đỉnh* $A(2;2)$ *và hai đường cao lần lượt có phương trình* $9x - 3y - 4 = 0; x + y - 2 = 0$. *Lập phương trình các cạnh của tam giác* ABC.

ĐS : $AB : x - y = 0, AC : x + 3y - 8 = 0, BC : 7x + 5y - 8 = 0$.

Bài 102. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *có đỉnh* $A(2;-1)$ *và các đường phân giác trong của góc* B *và* C *lần lượt có phương trình là:* $x - 2y + 1 = 0; x + y + 3 = 0$. *Lập phương trình đường thẳng* BC.

ĐS : $BC : 4x - y + 3 = 0$.

Bài 103. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *có đỉnh* $A(4;3)$ *và hai trung tuyến lần lượt có phương trình là:* $x + y - 5 = 0, 2x - y - 1 = 0$. *Lập phương trình các cạnh của tam giác* ABC.

ĐS : $AB : 3x - 5y + 3 = 0; BC : 15x + 9y - 55 = 0; CA : 3x - 4y = 0$.

Bài 104. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *có* $C(4;3)$ *và các đường phân giác trong, trong tuyến kẻ từ* A *lần lượt là:* $x + 2y - 5 = 0; 4x + 13y - 10 = 0$. *Xác định tọa độ điểm* B.

ĐS : $B(-12,1)$.

Bài 105. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(4;-1)$. Đường cao và trung tuyến kẻ từ B lần lượt có phương trình: $2x-3y+12=0; 2x+3y=0$. Xác định tọa độ điểm C.*

ĐS : $C(8;-7)$.

Bài 106. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$. Đường trung tuyến $BM: 2x+y+1=0$ và phân giác trong $CD: x+y-1=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.*

ĐS : $4x+3y+4=0$.

Bài 107. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(-1;3)$. Đường cao BH nằm trên đường thẳng $y=x$. Phân giác của góc C nằm trên đường thẳng $x+3y+2=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.*

ĐS : $BC: x-7y-18=0$.

Bài 108. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có 3 góc đều nhọn. Tọa độ chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C tương ứng là $A_1(-1;-2); B_1(2;2); C_1(-1,2)$. Viết phương trình cạnh AC.*

ĐS : $AC: 2x+y-6=0$.

Bài 109. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.*

ĐS : $BC: 3x-4y+16=0$.

Bài 110. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(-1;2), B(2;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc $d: x+2y-3=0$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 2.*

ĐS : $C(-9;6)$ hoặc $C(7;-2)$.

Bài 111. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(1;0), B(3;-1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc $d: x-2y-1=0$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 6 và C có tung độ lớn hơn 2.*

ĐS : $C(7;3)$.

Bài 112. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $B(2;-1)$, đường cao qua A có phương trình $d_1: 3x-4y+27=0$, phân giác trong của góc C có phương trình $d_2: x+2y-5=0$. Tìm tọa độ đỉnh A.*

ĐS : $A(-5;3)$.

Bài 113. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$, $A(2;-3)$, $B(3;-2)$. Tìm tọa độ đỉnh C biết C nằm trên đường thẳng $d: 3x-y-4=0$.*

ĐS : $C(-2;-10)$ hoặc $C(1;-1)$.

Bài 114. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết $A(2;-3), B(3;-2)$, có diện tích bằng $\frac{3}{2}$ và trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 3x-y-8=0$. Tìm tọa độ C.*

ĐS : $C(-2;-10)$ hoặc $C(1;-1)$.

Bài 115. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: x-2y-1=0$ và hai điểm $A(1;0), B(3;-1)$. Tìm điểm C thuộc đường thẳng d sao cho diên tích tam giác ABC bằng 6.*

ĐS : $C(7;3)$ hoặc $C(-5;3)$.

Bài 116. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(2;-3)$ và $B(3;-2)$ diện tích tan giác bằng $\frac{3}{2}$ và trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 3x-y-8=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.*

ĐS : $C(-2;-10)$ hoặc $C(1;-1)$.

Bài 117. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $B(1;-2)$, đường cao $AH: x-y-3=0$. Tìm tọa độ đỉnh A,C của tam giác ABC biết C thuộc đường thẳng $d: 2x+y-1=0$ và diện tích tam giác ABC bằng 1.*

ĐS : $C(2;-3)$, $A(-1;2)$ hoặc $A(-3;0)$.

Bài 118. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(-3;6)$, trực tâm $H(2;1)$, trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh B,C.*

ĐS : $B(1;-2), C(6;3)$ hoặc $B(6;3), C(-1;2)$.

Bài 119. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-4)$. Phương trình trung trực cạnh $BC: x+y-1=0$, đường trung tuyến xuất phát từ C có phương trình $3x-y-9=0$. Tìm tọa độ đỉnh B,C của tam giác ABC.*

ĐS : $C(3;0), B(1;-2)$.

Bài 120. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC cân tại đỉnh A có $A(6;6)$, đường thẳng d đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x+y+4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C, biết điểm $D(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác ABC.*

ĐS : $B(0;-4), C(-4;0)$ hoặc $B(-6;2), C(2;-6)$.

Bài 121. *Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $C(2;-5)$ và đường thẳng $\Delta: 3x-4y+4=0$. Tìm trên Δ hai điểm A,B đối xứng nhau qua $I\left(2;\frac{5}{2}\right)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 15.*

ĐS : $A(0;1), B(4;4)$.

Bài 122. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $AB=\sqrt{5}$, đỉnh $C(-1;-1)$ phương trình cạnh $AB: x+2y-3=0$ và trọng tâm G của tam giác ABC thuộc đường thẳng $d: x+y-2=0$. Xác định tọa độ đỉnh A,B của tam giác ABC.*

ĐS : $A\left(4;-\frac{1}{2}\right), B\left(6;-\frac{3}{2}\right)$ hoặc $B\left(4;-\frac{1}{2}\right), A\left(6;-\frac{3}{2}\right)$.

Bài 123. *Trong mặt phẳng Oxy tìm tọa độ các đỉnh của một tam giác vuông cân, biết $C(3;-1)$ và phương trình cạnh huyền $d: 3x-y+2=0$.*

ĐS : $A\left(\frac{3}{5};\frac{19}{5}\right), C\left(-\frac{9}{5};-\frac{17}{6}\right)$.

Bài 124. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với đường cao $BH: 3x+4y+10=0$, đường phân giác trong góc A là AD có phương trình $x-y+1=0$, điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa các đỉnh của tam giác ABC.*

ĐS : $A(4;5), B\left(-3;-\frac{1}{4}\right), C(1;1)$ hoặc $C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right)$.

Bài 125. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC cân có đáy là BC. Đỉnh A có tọa độ là các số dương, hai điểm B,C nằm trên trục Ox, phương trình cạnh$AB: 3\sqrt{7}x - y - 3\sqrt{7} = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết chu vi của tam giác ABC bằng 18.*

ĐS : $A(2;3\sqrt{7}), B(1;0), C(3;0)$.

Bài 126. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết phương trình chứa các cạnh AB, BC lần lượt có phương trình là: $4x+3y-4=0, x-y-1=0$. Phân giác trong của góc A nằm trên đường thẳng $x+2y-6=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.*

ĐS : $A(-2;4), B(1;0), C(5;4)$.

Bài 127. *Trong mặt phẳng Oxy biết tọa độ trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt là $H(2;2), I(1;2)$ nà trung điểm $M\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ của cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C biết $x_B > x_C$.*

ĐS : $A(-1;1), B(3;1), C(2;4)$.

Bài 128. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC cân tại C có diện tích bằng 10, phương trình cạnh $AB: x-2y=0$, điểm $I(4;2)$ là trung điểm của AB, điểm $M\left(4;\frac{9}{2}\right)$ thuộc cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tung độ điểm B lớn hơn hoặc bằng 3.*

ĐS : $A(2;1); B(6;3); C(2;6)$.

Bài 129. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, các đỉnh A,B thuộc đường thẳng $d: y=2$, phương trình cạnh $BC: \sqrt{3}x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng $\sqrt{3}$.*

ĐS : $A(3+\sqrt{3};2), B(0;2), C(3+\sqrt{3};5+3\sqrt{3})$ hoặc $A(-3-\sqrt{3};2), B(0;2), C(-1-3\sqrt{3})$.

2 Bài tập Đường tròn - Đường elip

Bài 1. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho ba đường thẳng* $(d_1): 2x+y-3=0, (d_2): 3x+4y+5=0$ *và* $(d_3): 4x+3y+2=0$*. Viết phương trình đường tròn* (C) *có tâm thuộc* (d_1) *và tiếp xúc với* (d_2) *và* (d_3)*.*

Đáp số: $(C): (x-2)^2+(y+1)^2=\dfrac{49}{25}$, $(C): (x-4)^2+(y+5)^2=\dfrac{9}{25}$

Bài 2. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho điểm* $A(-2;1)$*, hai đường thẳng* $(d_1): x+3y+8=0$ *và* $(d_2): 3x-4y+10=0$*. Viết phương trình đường tròn* (C) *có tâm thuộc đường thẳng* (d_1)*, đi qua* A *và tiếp xúc với đường thẳng* (d_2)

Đáp số: $(C): (x-1)^2+(y+3)^2=25$

Bài 3. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho hai đường thẳng* $(d_1): 4x-3y+3=0$ *và* $(d_2): 3x-4y-31=0$*. Lập phương trình đường tròn* (C) *tiếp xúc với* (d_1) *tại điểm có tung độ bằng 9 và tiếp xúc với* (d_2)*.*

Đáp số: $(C): (x-10)^2+(y-6)^2=25$, $(C): (x+190)^2+(y-156)^2=60025$

Bài 4. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho hai điểm* $A(-1;1)$ *và* $B(3;3)$*, đường thẳng* $(d): 3x-4y+8=0$*. Lập phương trình đường tròn* (C) *qua* A, B *và tiếp xúc với đường thẳng* (d)*.*

Đáp số: $(C): (x-3)^2+(y+2)^2=25$, $(C): \left(x-\dfrac{31}{2}\right)^2+\left(y+27\right)^2=\dfrac{4225}{4}$

Bài 5. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho hai đường thẳng* $(d_1): x+2y-3=0$ *và* $(d_2): x+3y-5=0$*. Lập phương trình đường tròn* (C) *có bán kính bằng* $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$*, có tâm thuộc* (d) *và tiếp xúc* (d_2)*.*

Đáp số: $(C): (x+9)^2+(y-6)^2=\dfrac{8}{5}$, $(C): (x-7)^2+(y+2)^2=\dfrac{8}{5}$

Bài 6. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho đường tròn* $(C): x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$*. Tia* Oy *cắt* (C) *tại* A*. Lập phương trình đường tròn* (C')*, bán kính* $R'=2$ *và tiếp xúc ngoài với* (C) *tại* A*.*

Đáp số: $(C'): (x-\sqrt{3})^2+(y-3)^2=4$

Bài 7. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho đường tròn* $(C): x^2+y^2-4y-5=0$*. Lập phương trình đường tròn* (C') *đối xứng với* (C) *qua điểm* $M\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{2}{5}\right)$

Đáp số: $(C'): \left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{6}{5}\right)^2=9$.

Bài 8. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho đường tròn* $(C): x^2+y^2-2x+4y+2=0$*. Lập phương trình đường tròn* (C') *tâm* $M(5;1)$ *biết* (C') *cắt* (C) *tại hai điểm* A, B *sao cho* $AB=\sqrt{3}$*.*

Đáp số: $(C'):(x-5)^2+(y-1)^2=43, (C'):(x-5)^2+(y-1)^2=13$.

Bài 9. *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và điểm $K(3;4)$. Lập phương trình đường tròn (T) có tâm K, cắt (C) tại hai điểm A,B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất, với I là tâm đường tròn (C).*

Đáp số: $(C):(T):(x-3)^2+(y-4)^2=4$, $(T):(x-3)^2+(y-4)^2=20$

Bài 10. *Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-2;3), B\left(\frac{1}{4};0\right)$ và $C(2;0)$. Lập phương trình đường tròn (C) nội tiếp tam giác ABC.*

Đáp số: $(C):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

Bài 11. *Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1):4x-3y-12=0$ và $(d_2):4x+3y-12=0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có 3 cạnh nằm trên $(d_1),(d_2)$ và trục Oy.*

Đáp số: $I\left(\frac{4}{3};0\right), R=\frac{4}{3}$

Bài 12. *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $(d):x-y-1=0$ và hai đường tròn có phương trình $(C_1):(x-3)^2+(y+4)^2=8, (C_2):(x+5)^2+(y-4)^2=32$. Lập phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc ngoải với (C_1) và (C_2).*

Đáp số: $(C):x^2+(y+1)^2=2$

Bài 13. *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=10$ và đường thẳng (d): $2x-y-2=0$. Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C), biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng (d) một góc 45^0.*

Đáp số: có 4 tiếp tuyến cần tìm là $3x+y+6=0, 3x+y-14=0, x-3y-8=0, x-3y+12=0$

Bài 14. *Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $(C_1):x^2+y^2-2x-2y-2=0$, $(C_2):x^2+y^2-8x-2y+16=0$. Lập phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).*

Đáp số: có 3 tiếp tuyến chung $x=3, y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{4+7\sqrt{2}}{4}, y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{4-7\sqrt{2}}{4}$

Bài 15. *Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $(C_1):(x-1)^2+y^2=\frac{1}{2}$, $(C_2):(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng (d) tiếp xúc với (C_1) và cắt (C_2) tại hai điểm M,N sao cho $MN=2\sqrt{2}$.*

Đáp số: $(d):x+y-2=0, (d):x+7y-6=0, (d):x-y-2=0, (d):7x-y-2=0$.

Bài 16. *Trong mặt phẳng* Oxy, *cho đường tròn* $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$ *và đường thẳng* $(d): x+2y-12=0$. *Tìm* M *trên* (d) *sao cho từ* M *vẽ được với* (C) *hai tiếp tuyến lập với nhau một góc* 60^o.

Đáp số: $M(6;3)$, $M\left(\frac{6}{5};\frac{27}{5}\right)$.

Bài 17. *Trong mặt phẳng* Oxy, *cho đường tròn* $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=9$ *và đường thẳng* $(d): x+y+m=0$. *Tìm* m *để trên* (d) *có duy nhất một điểm* A *mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến* AB, AC *tới* (C) *(*B, C *là tiếp điểm) sao cho tam giác* ABC *vuông.*

Đáp số: $m \in \{-5;7\}$

Bài 18. *Trong mặt phẳng* Oxy, *cho đường tròn* $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=9$ *và đường thẳng* $(d): 3x-4y+m=0$. *Tìm* m *để trên* (d) *có duy nhất một điểm* A *mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến* AB, AC *tới* (C) *(*B, C *là tiếp điểm) sao cho tam giác* ABC *đều.*

Đáp số: $m \in \{-41;9\}$

Bài 19. *Trong mặt phẳng* Oxy, *cho hai đường tròn* $(C_1): x^2+y^2-18x-6y+65=0$ *và* $(C_2): x^2+y^2=9$. *Từ điểm* M *thuộc* $C_1)$ *kẻ hai tiếp tuyến với* (C_2), *gọi* A, B *là các tiếp điểm. Tìm tọa độ* M, *biết độ dài đoạn* AB *bằng 4,8.*

Đáp số: $M(4;3)$, $M(5;0)$

Bài 20. *Trong mặt phẳng* Oxy, *cho đường tròn* $(C): (x-1)^2+(y+1)^2=25$ *và điểm* $M(7;3)$. *Lập phương trình đường thẳng* (d) *qua* M *cắt* (C) *tại hai điểm* A, B *phân biệt sao cho* $MA=3MB$

Đáp số: $(d): y-3=0$, $(d): 12x-5y-69=0$.

Bài 21. *Trong mặt phẳng* Oxy, *cho elip* $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. *Gọi* A, B *là các điểm trên* (E) *sao cho* $AF_1+AF_2=8$, *với* F_1, F_2 *là các tiêu điểm. Tính* AF_2+BF_1.

Đáp số: $AF_2+BF_1=12$

Bài 22. *Trong mặt phẳng* Oxy, *viết phương trình elip* (E) *với các tiêu điểm* $F_1(-1;1), F_2(5;1)$ *và tâm sai* $e=0,6$.

Đáp số: $(E): \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

Bài 23. *Trong mặt phẳng* Oxy, *cho điểm* $C(2;0)$ *và elip* $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. *Tìm tọa độ các điểm* A, B *thuộc* (E), *biết rằng* A, B *đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác* ABC *là tam giác đều.*

Đáp số: $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

Bài 24. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip* $(E): \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$*. Tìm* $M\in(E)$ *sao cho* $\widehat{F_1MF_2}=120^0$ *(với* F_1,F_2 *là hai tiêu điểm)*

Đáp số: $M_1(0;5), M_2(0;-5)$

Bài 25. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip* (E) *có hai tiêu điểm* $F_1(-\sqrt{3};0), F_2(\sqrt{3};0)$ *và đi qua điểm* $A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$*. Lập phương trình chính tắc của* (E) *và với mọi điểm* M *trên elip, hãy tính giá trị biểu thức* $P=F_1M^2+F_2M^2-3OM^2-F_1M.F_2M$

Đáp số: $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, $P=1$

Bài 26. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip* $(E): 4x^2+16y^2=64$*. Gọi* F_2 *là tiêu điểm bên phải của* (E)*,* M *là điểm bất kì trên* (E)*. Chứng minh rằng tỉ số khoảng cách từ* M *tới* F_2 *và tới đường thẳng* $\Delta: x=\frac{8}{\sqrt{3}}$ *có giá trị không đổi.*

Đáp số: $\frac{MF_2}{d(M;\Delta)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 27. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip* $(E): 5x^2+16y^2=80$ *và hai điểm* $A(-5;-1)$*,* $B(-1;1)$*. Một điểm* M *di động trên* (E)*. Tính giá trị lớn nhất của diện tích tam giác* MAB*.*

Đáp số: $S_{\max}=9$ khi $M\left(\frac{8}{3;-\frac{5}{3}}\right)$

Bài 28. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip* $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ *và hai điểm* $A(3;-2), B(-3;2)$*. Tìm trên* (E) *điểm* (C) *có hoành độ và tung độ dương sao cho tam giác* ABC *có diện tích lớn nhất.*

Đáp số: $M\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$

Bài 29. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip* $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ *và điểm* $M(1;1)$*. Viết phương trình đường thẳng qua* M *và cắt* (E) *tại hai điểm* A,B *sao cho* M *là trung điểm của* AB*.*

Đáp số: $9x+25y-34=0$

Bài 30. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip* $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$*. Tìm* M *trên* (E) *sao cho* M *có tọa độ nguyên.*

Đáp số: $(2;1),(2;-1),(-2;1),(-2;-1)$

Bài 31. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip* $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$*. Tìm* $M\in(E)$ *sao cho tổng hai tọa độ của* M *có giá trị lớn nhất.*

Đáp số: $M\left(\frac{4\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$

Bài 32. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip* $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ *và các đường thẳng* $(d_1): mx-ny=0, (d_2): nx+my=0$*, với* $m^2+n^2\neq 0$*. Gọi* M, N *là các giao điểm của* (d_1) *với* (E)*,* P, Q *là các giao điểm của* (d_2) *với* (E)*. Tìm điều kiện đối với* m, n *để diện tích tứ giác* $MPNQ$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Đáp số: $m=\pm n$

Bài 33. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip* $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ *và đường thẳng* $(d): 3x+4y-12=0$*. Chứng minh rằng đường thẳng* (d) *luôn cắt* (E) *tại hai điểm phân biết* A, B*. Tìm* $C\in(E)$ *sao cho diện tích tam giác* ABC *bằng 6.*

Đáp số: $C_1\left(2\sqrt{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $C_2\left(-2\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Bài 34. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip* $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ *và* $A(3;0)$*. Tìm tọa độ các điểm* $B, C\in(E)$ *sao cho tam giác* ABC *vuông cân tại* A*.*

Đáp số: $B\left(\frac{12}{5};\frac{3}{5}\right)$, $C\left(\frac{12}{5};-\frac{3}{5}\right)$ hoặc $B\left(\frac{12}{5};-\frac{3}{5}\right)$, $C\left(\frac{12}{5};\frac{3}{5}\right)$

Bài 35. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho elip (E) :* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$*.* M *và* N *là hai điểm trên* (E) *sao cho tam giác* OMN *vuông tại* O *(* O *là gốc tọa độ). Gọi* H *là hình chiếu của* O *trên* MN*. Tìm quỹ tích* H*.*

Đáp số: ${x_H}^2+{y_H}^2=\frac{100}{29}$

Bài 36. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho đường tròn* $(C): x^2+y^2=8$*. Viết phương trình chính tắc của elip* (E)*, biết* (E) *có độ dài trục lớn bằng 8 và* (E) *cắt* (C) *tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của hình vuông.*

Đáp số: $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$

Bài 37. *Trong mặt phẳng* Oxy*, cho hình thoi* $ABCD$ *có* $AC=2BD$ *và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình* $x^2+y^2=4$*. Viết phương trình chính tắc của elip* (E) *đi qua các đỉnh* A, B, C, D*. Biết* A *thuộc* Ox*.*

Đáp số: $(E): \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

Bài 38. *Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.*

Đáp số: $A\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Bài 39. *Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(2; \sqrt{3})$ và elip $(E) : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.*

Đáp số: $(x-1)^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$.

Bài 40. *Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho M nhìn đoạn nối hai tiêu điểm dưới góc 60^0*

Đáp số: $M\left(\frac{\sqrt{21}}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{6}\right); M\left(-\frac{\sqrt{21}}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{6}\right); M\left(-\frac{\sqrt{21}}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{6}\right); M\left(\frac{\sqrt{21}}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$

Bài 41. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $(d) : x - y + 1 = 0$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) mà qua M kẻ được 2 tiếp tuyền tiếp xúc với (C) tại A và B sao cho $\widehat{AMB} = 60^o$.*

ĐS :

Bài 42. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn hai đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $(C') : x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ cùng đi qua $M(1;0)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt hai đường tròn (C), (C') lần lượt tại A, B sao cho $MA = 2MB$.*

ĐS : $6x + 1y - 6 = 0$

Bài 43. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$. Tìm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến của (C) mà góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng 60^o.*

ĐS :

Bài 44. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn hai đường $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $(C') : x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ cùng đi qua $M(1;0)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt hai đường tròn (C), (C') lần lượt tại A, B sao cho $MA = 2MB$.*

ĐS :

Bài 45. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d : 3x + y - 2 = 0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.*

ĐS :

Bài 46. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 1$, đường thẳng $(d) : x + y + m = 0$. Tìm m để (C) cắt (d) tại A và B sao cho diện tích tam giác ABO lớn nhất.*

ĐS :

Bài 47. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y-1=0$ và đường thẳng $d: x+y+1=0$. Tìm những điểm M thuộc đường thẳng d sao cho từ điểm M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 90^o*

ĐS :

Bài 48. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$. Tia Oy cắt (C) tại A. Lập phương trình đường tròn (C'), bán kính $R'=2$ và tiếp xúc ngoài với (C) tại A.*

ĐS :

Bài 49. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $M(5,1)$ biết (C') cắt (C) tại các điểm A,B sao cho $AB=\sqrt{3}$.*

ĐS :

Bài 50. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: x+y+m=0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) (B,C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.*

ĐS :

Bài 51. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ và đường thẳng d có phương trình $x+y+m=0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) (B,C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.*

ĐS :

Bài 52. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: x-2y+4=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm $I(3;1)$ chắn trên đường thẳng d một dây cung có độ dài bằng 4.*

ĐS : $(x-3)^2+(y-1)^2=9$.

Bài 53. *Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(2;3), B(-1;1)$ và đường thẳng $\Delta: x-3y-11=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên Δ và qua hai điểm A, B.*

ĐS : $x^2+y^2-7x+5y-14=0$.

Bài 54. *Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(0;5), B(2;3)$. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính $R=\sqrt{10}$.*

ĐS : $(x+1)^2+(y-2)^2=10$ hoặc $(x-3)^2+(y-6)^2=10$.

Bài 55. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $\Delta: x+y-5=0$ và đường thẳng $d: 3x+y-3=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng Δ có bán kính bằng 10 đồng thời tiếp xúc với đường thẳng d.*

ĐS : $(x-4)^2+(y-1)^2=10$ hoặc $(x+6)^2+(y-11)^2=10$.

Bài 56. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $\Delta: 2x+y=0$ và đường thẳng $d: x-7y+10=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng Δ và tiếp xúc với d tại $A(4;2)$.*

ĐS : $(x-6)^2+(y+12)^2=200$.

Bài 57. *Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $d_1: 2x+y-3=0, d_2: 3x+4y+5=0, d_3: 4x+3y+2=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d_1 và tiếp xúc với d_2, d_3.*

ĐS : $(x-10)^2+y^2=49$ hoặc $\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$.

Bài 58. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường thẳng* $d: x-7y+10=0$ *và đường tròn* $(C'): x^2+y^2-2x+4y-20=0$. *Viết phương trình đường tròn* (C) *qua* $A(1;-2)$ *và các giao điểm của* (C') *và* d.

ĐS : $x^2+y^2-2x+4y-10=0$.

Bài 59. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho tam giác* ABC *có diện tích bằng* $\frac{3}{2}$, $A(2;-3), B(3;-2)$, *trọng tâm* G *của tam giác* ABC *nằm trên đường thẳng* $d: 3x-y-8=0$. *Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm* A, B, C.

ĐS : $x^2+y^2-\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}y+\frac{16}{3}=0$ hoặc $x^2+y^2-\frac{91}{3}x+\frac{91}{3}y+\frac{416}{3}=0$.

Bài 60. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): x^2+y^2-12x-4y+36=0$. *Viết phương trình đườn tròn* (C_1) *tiếp xúc với hai trục tọa độ* Ox, Oy *đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn* (C).

ĐS : $(x-18)^2+(y-18)^2=324, (x-2)^2+(y-2)^2=4, (x-6)^2+(y+6)^2=36$.

Bài 61. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho ba điểm* $A(-1;7), B(4;-3), C(-4;-1)$. *Hãy viết phương trình đường tròn* (C) *nội tiếp tam giác* ABC.

ĐS : $(x+1)^2+(y-2)^2=5$.

Bài 62. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): (x-1)^2+(y+3)^2=25$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *đi qua gốc tọa độ* O *và cắt* (C) *theo một dây cung có độ dài bằng* 8.

ĐS : $y=0$ hoặc $3x-4y=0$.

Bài 63. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): x^2+y^2+2x-4y-20=0$ *và điểm* $A(3;0)$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *đi qua* A *và cắt đường tròn* (C) *tại hai điểm* M, N *sao cho* MN *có độ dài nhỏ nhất.*

ĐS : $x+2y-3=0$.

Bài 64. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): x^2+y^2+2x-4y-20=0$ *và điểm* $A(3;0)$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *đi qua* A *và cắt đường tròn* (C) *tại hai điểm* M, N *sao cho* MN *có độ dài lớn nhất.*

ĐS : $2x-y-6=0$.

Bài 65. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): x^2+y^2+2x-4y+4=0$ *có tâm* I *và điểm* $M(-1;-3)$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *đi qua* M *và cắt đường tròn* (C) *tại hai điểm* A, B *sao cho tam giác* IAB *có diện tích lớn nhất.*

ĐS : $x+y+4=0$ hoặc $7x+y+10=0$.

Bài 66. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): x^2+y^2-6x+5=0$. *Tìm điểm* M *thuộc trục tung sao cho từ* M *kẻ được hai tiếp tuyến với* (C) *mà góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng* 60^0.

ĐS : $M(0;-\sqrt{7})$ hoặc $M(0;\sqrt{7})$.

Bài 67. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$ *và đường thẳng* $d: x+2y-12=0$. *Tìm điểm* M *thuộc đường thẳng* d *sao cho từ* M *kẻ được hai tiếp tuyến với* (C) *mà góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng* 60^0.

ĐS : $M(6;3), M\left(\frac{6}{5};\frac{27}{5}\right)$.

Bài 68. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho hai đường tròn* $(C): x^2+y^2-18x-6y+65=0$ *và* $(C'): x^2+y^2=9$. *Từ điểm* M *thuộc đường tròn* (C) *kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn* (C'), *gọi* A, B *là hai tiếp điểm. Tìm tọa độ điểm* M, *biết độ dài* AB *bằng* $\frac{9}{5}$.

ĐS : $M(4;3)$ hoặc $M(5;0)$.

Bài 69. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): (x+4)^2+(y-3)^2=25$ *và đường thẳng* $\Delta: 3x-4y+10=0$. *Lập phương trình đường thẳng* d *biết* d *vuông góc với* Δ *và* d *cắt* (C) *tại* A, B *sao cho* $AB=6$.

ĐS : $4x+3y+27=0$ hoặc $4x+3y-13=0$.

Bài 70. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho hai đường tròn* $(C_1): x^2+y^2=13$ *và* $(C_2): (x-6)^2+y^2=25$. *Gọi* A *là giao điểm của* (C_1) *và* (C_2) *với* $y_A>0$. *Viết phương trình đường thẳng* d *đi qua* A *cắt* $(C_1), (C_2)$ *theo hai đay cung có độ dài bằng nhau.*

ĐS : $x-2=0$ hoặc $x-3y+7=0$.

Bài 71. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường thẳng* $d: x-5y-2=0$ *và đường tròn* $(C): x^2+y^2+2x-4y-8=0$. *Xác định tọa độ các giao điểm* A, B *của đường tròn* (C) *và đường thẳng* d *biết* A *có hoành độ dương. Tìm tọa độ điểm* C *thuộc đường tròn* (C) *sao cho tam giác* ABC *vuông ở* B.

ĐS : $C(-4;4)$.

Bài 72. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): x^2+y^2-2x-4y-5=0$ *và* $A(0;-1)$. *Tìm tọa độ* B, C *thuộc đường tròn* (C) *sao cho tam giác* ABC *đều.*

ĐS : $B\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2};\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right), C\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2};\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 73. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): (x-3)^2+(y-4)^2=35$ *và điểm* $A(5;5)$. *Tìm trên* (C) *hai điểm* B, C *sao cho tam giác* ABC *vuông cân tại* A.

ĐS : $B\left(\frac{7+3\sqrt{13}}{2};\frac{11-\sqrt{13}}{2}\right), C\left(\frac{9+\sqrt{13}}{2};\frac{7+3\sqrt{13}}{2}\right)$ hoặc $B\left(\frac{7-3\sqrt{13}}{2};\frac{11+\sqrt{13}}{2}\right), C\left(\frac{9-\sqrt{13}}{2};\frac{7-3\sqrt{13}}{2}\right)$.

Bài 74. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): x^2+y^2=4$ *và điểm* $A\left(1;\frac{-8}{3}\right), B(3;0)$. *Tìm* M *thuộc* (C) *sao cho tam giác* MAB *có diện tích bằng* $\frac{20}{3}$.

ĐS : $M(-2;0)$ hoặc $M\left(-\frac{14}{25};\frac{48}{75}\right)$.

Bài 75. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường tròn* $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$ *và đường thẳng* $d: x-y+3=0$. *Tìm tọa độ điểm* M *nằm trên* d *sao cho đường tròn tâm* M *có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn* (C) *và tiếp xúc ngoài với đường tròn* (C).

ĐS : $M(1;4), M(-2;1)$.

Bài 76. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d:3x-4y+m=0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA,PB tới (C) (A,B là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC đều.*

ĐS : $m=19, m=-41$.

Bài 77. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=1$ có tâm I. Xác định tọa độ điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho $\widehat{IMO}=30^0$.*

ĐS : $M\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 78. *Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.*

ĐS : $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ hoặc $(x-2)^2+(y-7)^2=49$.

Bài 79. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(-3;1)$. Gọi A,B là hai tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng AB.*

ĐS : $AB:2x+y-3=0$.

Bài 80. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1:x-y=0,\Delta_2:x-7y=0$. Xác định tọa độ tâm K của đường tròn (C_1) biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với đường thẳng Δ_1,Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C).*

ĐS : $K\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right), R=\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Bài 81. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và đường thẳng $d:x-y-1=0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua d.*

ĐS : $(x-2)^2+y^2=4$.

Bài 82. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(0;2),B(-2;-2),C(4;-2)$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B, M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm H,M,N.*

ĐS : $x^2+y^2-x+y-2=0$.

Bài 83. *Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $\Delta:x+my-2m+3=0$ với m là tham số thực. Gọi I là tâm đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.*

ĐS : $m=0, m=\frac{8}{15}$.

Bài 84. *Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $d_1:\sqrt{3}x+y=0$ và $d_2:\sqrt{3}x-y=0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A cắt d_2 tai hai điểm B,C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình đường tròn (C) biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.*

ĐS : $\left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\frac{2}{2}\right)^2=1$.

Bài 85. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho các đường tròn* $(C_1): x^2+y^2=4, (C_2): x^2+y^2-12x+18=0$ *và đường thẳng* $d: x-y-4=0$. *Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc* (C_2), *tiếp xúc với* d *cắt* (C_1) *tại hai điểm phân biệt* A, B *sao cho* AB *vuông góc với* d.

ĐS : $(x-3)^2+(y-3)^2=8$.

Bài 86. *Trong mặt phẳng* Oxy *cho đường thẳng* $d: 2x-y+3=0$. *Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc* d, *cắt* Ox *tại* A, B, *cắt* Oy *tại* C, D *sao cho* $AB=CD=2$.

ĐS : $(x+1)^2+(y-1)^2=2$ hoặc $(x+3)^2+(y+3)^2=10$.

boxmath.vn